Dissertation

Interpolationseigenschaften von Halbgruppen und Ω-Halbgruppen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der technischen Wissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Technisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

von

Gottfried Chen
Johannag. 16/19, 1050 Wien
Matrikelnr. 9026209

geboren am 9.7.1972 in Wien

Wien, im März 1997

Kurzfassung

Im ersten Kapitel wird eine kurze Zusammenfassung über die Theorie des Jacobson-Radikals gegeben und der Dichtesatz von Jacobson für primitive Ringe bewiesen, wobei wir einen Beweis geben, der die Möglichkeiten einer Verallgemeinerung dieses Satzes auf andere algebraische Strukturen aufzeigt.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit der Untersuchung primitiver Halbgruppen. Zu Beginn werden spezielle Halbgruppen behandelt. So stellt sich z.B. heraus, daß für primitive Halbgruppen die Begriffe Links- bzw. Rechtsgruppe und Gruppe zusammenfallen. Wir geben dann ein Beispiel zur Konstruktion einer primitiven Halbgruppe, die auf ihrem zugehörigen S-System an n, aber nicht an $n + 1$ Stellen interpoliert, $n \in \mathbf{N}$ beliebig. Im Halbgruppenfall gilt also nicht wie bei Fastringen, daß Interpolation an 4 Stellen die Interpolation an beliebig vielen Stellen impliziert. Eines der Hauptergebnisse ist die vollständige Bestimmung der Struktur der Menge aller Endomorphismen eines treuen, einfachen S-Systems M. End M ist entweder eine triviale Gruppe (mit 0) oder eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung. Daraus können wir dann folgern, daß das Zentrum einer primitiven Halbguppe S entweder nur aus 0 und 1 besteht (falls vorhanden) oder gleich S ist. In diesem Fall ist S eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung. Weiters zeigen wir eine Charakterisierung der Interpolationseigenschaft für linkskongruenzvertauschbare Halbgruppen und bestimmen die Struktur des Linksidealverbands linkskongruenzvertauschbarer Halbgruppen.

Im dritten Kapitel wenden wir uns der Untersuchung primitiver Ω-Halbgruppen zu, einer Klasse universeller Algebren, die die klassischen Strukturen z.B. der Ringe, Fastringe und Halbgruppen enthält. Für Ω-Halbgruppen A, in denen alle modularen Linkskongruenzen vertauschen, können wir einen abstrakten Unabhängigkeitsbegriff auf A-Moduln einführen, der den der linearen Unabhängigkeit enthält, sodaß wie beim Dichtesatz von Jacobson Unabhängigkeit und Interpolationseigenschaft von Modulelementen äquivalent sind. Abschließend geben wir eine Charakterisierung der Unabhängigkeit für eine spezielle Klasse von Ω-Halbgruppen, aus welcher sich im Ringfall sofort der Dichtesatz von Jacobson folgern läßt.

für meinen Vater

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Ausgangspunkt meiner Arbeit liegt in der Ringtheorie. Wie in den anderen Bereichen der Algebra, steht auch hier die Bemühung im Vordergrund, die Struktur der betrachteten Algebra, in diesem Fall eines Ringes, zu beschreiben, im Idealfall erhält man eine Klassifikation der betrachteten Objekte (wie z.B. bei endlichen abelschen Gruppen). Der klassische Struktursatz von Wedderburn-Artin charakterisiert halbeinfache Ringe mit absteigender Kettenbedingung für Linksideale als direktes Produkt endlich vieler voller Matrizenringe über Schiefkörpern. Eine analoge Aussage für beliebige Ringe (daher ohne Kettenbedingung) lieferte Jacobson. Wir fassen die Vorgangsweise kurz zusammen:

Um die Untersuchungen zu vereinfachen, ordnet man jedem Ring R ein Ideal $J(R)$ zu, das sogenannte **Jacobson-Radikal** des Ringes R. wobei $J(R)$ folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

1. Ringe R mit $J(R) = 0$, die sogenannten **halbeinfachen** Ringe, haben eine relativ einfach zu beschreibende Struktur.

2. $J(R/J(R)) = 0$, und für jedes Ideal I mit $J(R/I) = 0$ gilt $J(R) \leq I$. Für jeden Ring ist daher $J(R)$ das kleinste Ideal mit halbeinfachem Faktor.

(Die Betrachtung von Faktoralgebren ist eine häufig angewandte Methode, um eine einfacher zu beschreibende Struktur zu erhalten.) Halbeinfache Ringe sind nun das subdirekte Produkt sogenannter **primitiver** Ringe, deren Struktur sich sehr einfach beschreiben läßt. Primitive Ringe sind Ringe linearer Abbildungen eines Vektorraums M, wobei jede lineare Abbildung von M an endlich vielen Stellen durch ein Element von R interpoliert wird. Äquivalent dazu ist die Aussage, daß zu jeder natürlichen Zahl n und Elementen $m_1, \dots, m_n, p_1, \dots, p_n \in M$ genau dann ein $a \in R$ mit $am_i = p_i$, $i = 1, \dots, n$, existiert, falls die Elemente $m_1, \dots, m_n$ linear unabhängig sind. Diese Charakterisierung primitiver Ringe nennt man den **Dichtesatz von Jacobson**.

In Analogie zum Ringfall wurde diese Vorgangsweise

1. Definition eines Radikals.

2. Beschreibung der daraus resultierenden Faktorstruktur.

im Laufe der Zeit auf diverse algebraische Strukturen erfolgreich angewandt (z.B. bei Fastringen). Bei Halbgruppen gibt es ebenfalls eine Reihe von Radikalbegriffen, sowie deren Beschreibung. In meiner Arbeit konzentriere ich mich vor allem auf das **einfache Radikal** einer Halbgruppe S, das als Durchschnitt aller Annulatoren einfacher, treuer S-Systeme definiert ist. Während die Struktur primitiver Ringe durch den Jacobsonschen Satz beschrieben wird, gibt es keine derartigen Untersuchungen im Halbgruppenfall. Im Fall primitiver Ringe spielt die Menge $\operatorname{End} M$ der Endomorphismen eines R zugeordneten einfachen, treuen Moduls M eine wichtige Rolle. Dieser erweist sich nämlich als Schiefkörper, über dem M als Vektorraum aufgefaßt werden kann, der dann auch jener Vektorraum ist, der im Dichtesatz von Jacobson verwendet wird. Bei einer Halbguppe S tritt nun an die Stelle eines Moduls der äquivalente Beriff eines S-Systems M. Da $\operatorname{End} M$ im Ringfall eine so wichtige Rolle spielt, war es naheliegend, die Struktur von $\operatorname{End} M$ auch im Halbgruppenfall zu untersuchen (M bezeichnet dabei ein einfaches, treues S-System). Im zweiten Kapitel wird das Problem der Beschreibung der Struktur von $\operatorname{End} M$ gelöst. Weiters wurden für einige wichtige Klassen die Interpolationseigenschaften primitiver Halbgruppen untersucht, sowie weitere Eigenschaften primitiver Halbgruppen dargelegt.

Im dritten Kapitel wenden wir uns der Untersuchung von Ω-Halbgruppen zu. Auch darauf lassen sich Begriffe wie Modul, Radikal und halbeinfache bzw. primitive Ω-Halbgruppe übertragen. Wir werden eine hinreichende Bedingung angeben, unter der man auf einem einfachen, treuen Modul M eine abstrakte Unabhängigkeitsrelation definieren kann, die eine direkte Verallgemeinerung der linearen Unabhängigkeit im Ringfall ist, sodaß Unabhängigkeit und Interpolation äquivalent sind, analog zum Jacobsonschen Dichtesatz. Weiters werden wir dann diese Unabhängigkeitsrelation so charakterisieren, daß man den Satz von Jacobson als Folgerung daraus erhält und auch noch weitere Beispiele.

Abschließend möchte ich meinem Betreuer Prof. Mlitz für seine Hilfe bei meiner Arbeit und die vielen Hinweise und Denkanstöße danken, ohne die ich sicher nicht so schnell vorangekommen wäre. Außerdem danke ich meinen Eltern, die mir während meiner ganzen Schul- bzw. Universitätszeit eine große Unterstützung waren.

Kapitel 1

Die Struktur von Ringen

1.1 Das Jacobson-Radikal

Im ersten Kapitel werden kurz bekannte Ergebnisse über die Theorie des Jacobson-Radikals wiederholt. Da die Beweise sehr instruktiv sind und die Vorgangsweise in den späteren Kapiteln motivieren, werden sie ebenfalls gebracht.

In diesem Abschnitt definieren wir den Begriff des Jacobson-Radikals, das im weiteren eine wesentliche Rolle spielen wird. Weiters definieren wir einige grundlegende Begriffe, die wir später in der Formulierung des Jacobsonschen Dichtesatzes benötigen werden.

Definition 1.1.1 Ein **Ring** ist ein Algebra $(R, +, \cdot)$, wobei $(R, +)$ eine kommutative Gruppe und $(R, \cdot)$ eine Halbgruppe bildet. Weiters gelten die beiden **Distributivgesetze**:

1. $a(b + c) = ab + ac$
2. $(b + c)a = ba + ca$

Sei R ein Ring. Dann nennt man eine Algebra $(M, +, R)$, wobei $(M, +)$ eine kommutative Gruppe ist, und jedes Element $a \in R$ als einstellige Operation auf M operiert (dh. $am \in M$ für alle $m \in M$) einen R**-(Links-)Modul**. Weiters gelten für alle $a, b \in R$ und $m, n \in M$ folgende Gesetze:

1. $(ab)m = a(bm)$

2. $(a+b)m = am + bm$

3. $a(m+n) = am + an$

Ein Modul heißt **einfach**, wenn er keine Untermoduln außer 0 (bei einelementigen Mengen werden die Mengenklammern oft weggelassen) und M besitzt.

Für jedes Element $m \in M$ definiert man den **Annulator von** m durch

$$\operatorname{Ann} m := \{a \in R \mid am = 0\}.$$

Der **Annulator von** M ist definiert als

$$\operatorname{Ann} M := \bigcap_{m \in M} \operatorname{Ann} m.$$

Ist $\operatorname{Ann} M = \{0\}$, dann nennt man M einen **treuen** Modul.

Bemerkung 1.1.2 Sind $a, b \in \operatorname{Ann} M$, dann gilt auch $a + b \in \operatorname{Ann} M$. Sei $c \in R$ beliebig, so folgt $cam = c0 = 0$, $acm = a(cm) = 0$ für alle $m \in M$. $\operatorname{Ann} M$ ist also ein Ideal.

Definition 1.1.3 Das **(Jacobson-)Radikal** $J(R)$ eines Ringes R ist folgendes Ideal:

$$J(R) := \bigcap_{M} \operatorname{Ann} M,$$

wobei der Durchschnitt über alle einfachen R-Moduln gebildet wird. Gilt $J(R) = 0$, dann nennt man R **halbeinfach**.

Bemerkung 1.1.4 Das Jacobson-Radikal eines Ringes erfüllt folgende zwei Eigenschaften:

1. Sei $f : R \to f(R)$ ein Homomorphismus. Dann gilt $f(J(R)) \subseteq J(f(R))$.

2. $J(R/J(R)) = 0$.

Daraus folgt, daß $J(R)$ das kleinste Ideal mit halbeinfachem Faktor ist. (Der Verallgemeinerung dieser Aussagen folgt in Kapitel 3).

1.2 Einige Eigenschaften einfacher Moduln

Wir untersuchen nun einfache Moduln sowie die Annulatoren von Modulelementen, was zu einer inneren Charakterisierung des Radikals führen wird.

Bemerkung 1.2.1 Sei M ein einfacher R-Modul. Dann ist $Rm := \{rm \mid r \in R\}$ für jedes $m \in M$ ein Untermodul. Es gilt daher entweder $Rm = 0$ oder $Rm = M$. $N := \{m \in M \mid Rm = 0\}$ ist stets ein Untermodul. Ist $N = M$, dann operiert R trivial auf M, da $am = 0$ für alle $a \in R$, $m \in M$ gilt. (In diesem Fall ist jede Untergruppe von $(M, +)$ gleichzeitig Untermodul. Aus der Einfachheit von M folgt daher, daß M eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung ist.) Interessant ist daher nur der Fall $N = 0$, woraus folgt, daß für jedes Element $m \in M$ mit $m \neq 0$ $Rm = M$ gilt.

Definition 1.2.2 Ein Modul heißt **strikt zyklisch**, wenn es ein Element $m \in M$ gibt, mit $Rm = M$. m nennt man dann **strikt erzeugendes Element** von M. Die obige Bemerkung besagt also, daß in einem einfachen Modul, auf dem R nicht trivial operiert, jedes Element $m \neq 0$ ein strikt Erzeugendes ist.

Bemerkung 1.2.3 Ab jetzt seien Moduln immer mit nichttrivial operierendem Ring vorausgesetzt. (Aus $RM = 0$ folgt $\operatorname{Ann} M = R$. Moduln, auf denen R trivial operiert, liefern daher keinen Beitrag zu $J(R)$.)

Satz 1.2.4 *Sei R ein Ring und M ein einfacher R-Modul. Dann ist $\operatorname{Ann} M$ das größte Ideal, das in $\operatorname{Ann} m$, $0 \neq m \in M$, enthalten ist.*

Beweis: Aus der Definition von $\operatorname{Ann} M$ folgt $\operatorname{Ann} M \subseteq \operatorname{Ann} m$. Sei nun I ein in $\operatorname{Ann} m$ enthaltenes Ideal. Da $m \neq 0$ ist, ist m ein strikt erzeugendes Element von M. Für alle $a \in I$, $n \in M$ gibt es daher ein $b \in R$ mit

$$an = abm = 0.$$

Dabei gilt das zweite Gleichheitszeichen, weil I ein Ideal ist und daher $ab \in I \subseteq \operatorname{Ann} m$. Man erhält also $I \subseteq \operatorname{Ann} M$ für alle Ideale $I \subseteq \operatorname{Ann} m$. $\square$

Ist $m \in M$ ein strikt erzeugendes Element, dann existiert ein Element $e_m \in R$ mit $e_m m = m$. Weiters gilt $a - ae_m \in \operatorname{Ann} m$ für alle $a \in R$. Das motiviert folgende Definition.

Definition 1.2.5 Ein Unterring $L \leq R$ heißt **Linksideal**, falls $aL \subseteq L$ gilt, für alle $a \in R$. Ein Linksideal heißt **modular**, falls es ein Element $e \in R$ gibt mit $ae - a \in L$ für alle $a \in R$. e nennt man ein **Rechtseinselement** mod L oder auch kurz eine **Rechtseins** mod L. Ein modulares Linksideal L heißt **maximal**, wenn es kein Linksideal $L' \neq R$ gibt mit $L < L'$ (jedes Linksideal, das ein modulares Linksideal enthält, ist selbst modular).

Satz 1.2.6 *Sei R ein Ring und M ein einfacher Modul. Dann ist für alle $m \in M$, $m \neq 0$, $\operatorname{Ann} m$ ein maximales, modulares Linksideal. Weiters gilt*

$$M \cong R/\operatorname{Ann} m, \text{ für alle } m \in M, \quad m \neq 0.$$

Andererseits erhält man zu jedem maximalen, modularen Linksideal L einen einfachen R-Modul R/L. Außerdem gilt $L = \operatorname{Ann} m$ für ein $m \in R/L$.

Beweis: Sei m ein fixes, strikt erzeugendes Element von M, $a, b \in \operatorname{Ann} m$ und $c \in R$. Wegen $(a+b)m = 0$ und $cam = 0$ ist $\operatorname{Ann} m$ ein Linksideal. Wir betrachten nun folgende Abbildung

$$\phi : R \to M, \ a \mapsto am.$$

Faßt man R in natürlicher Weise als R-Modul auf, dann ist ϕ ein surjektiver Homomorphismus von R auf M mit $\ker \phi = \operatorname{Ann} m$. Mit Hilfe des Homomorphiesatzes erhält man $R/\operatorname{Ann} m \cong M$. Wie oben schon erwähnt, gibt es ein Element $e_m \in R$ mit $a - ae_m \in \operatorname{Ann} m$ für alle $a \in R$, was gleichbedeutend mit der Modularität von $\operatorname{Ann} m$ ist. Da M einfach ist, muß $\operatorname{Ann} m$ ein maximales Linksideal sein. Wäre nämlich $L \neq R$ ein Linksideal, das $\operatorname{Ann} m$ enthält, dann ergäbe $L/\operatorname{Ann} m$ einen Untermodul von $R/\operatorname{Ann} m$.

Sei nun umgekehrt L ein maximales, modulares Linksideal mit Rechtseins e. Dann ist R/L ein einfacher R-Modul. Aus $a + L = ae + L$ folgt, daß $e + L$ ein erzeugendes Element ist, und es gilt

$$\operatorname{Ann}(e + L) = \{a \in R \mid a(e + L) = a + L = L\} = L.$$

□

Folgerung 1.2.7 *Mit Hilfe des obigen Satzes erhält man folgende Charakterisierung des Jacobson-Radikals, die keine Moduln benötigt:*

$$J(R) = \bigcap L, \quad L \text{ maximales, modulares Linksideal.}$$

1.3 Halbeinfache Ringe

Sei R ein halbeinfacher Ring, daher $J(R) = 0$. Dann folgt aus einem Satz der universellen Algebra ([Ihr1], Satz 5.2.4) folgender Satz.

Satz 1.3.1 *Jeder halbeinfache Ring R besitzt folgende Darstellung:*

$$R \cong \prod_M{}^s R/\operatorname{Ann} M, \quad M \text{ einfach},$$

wobei $\prod^s$ das subdirekte Produkt der $R/\operatorname{Ann} M$ bezeichnet.

Jeder R-Modul M kann auch als $(R/\operatorname{Ann} M)$-Modul aufgefaßt werden, indem man $(a + \operatorname{Ann} M)m := am$, $a \in R$, $m \in M$, setzt. M wird dadurch zu einem treuen $(R/\operatorname{Ann} M)$-Modul.

Definition 1.3.2 Ein Ring R heißt **primitiv**, wenn er einen einfachen, treuen R-Modul besitzt.

Bemerkung 1.3.3 Aus Satz 1.2.6 und Satz 1.2.4 folgt, daß ein Ring R genau dann primitiv ist, wenn er ein maximales, modulares Linksideal besitzt, das kein Ideal außer 0 enthält.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß es zu jedem Ring R ein Ideal $J(R)$ gibt, sodaß $R/J(R)$ halbeinfach und daher isomorph zu einem subdirekten Produkt primitiver Ringe ist. Offen ist noch die Beschreibung der Struktur primitiver Ringe.

1.4 Das Lemma von Schur

Ein wesentlicher Punkt bei der Untersuchung primitiver Ringe ist die Struktur des Endomorphismenringes des zugehörigen treuen, einfachen Moduls M. Dieser erweist sich als Schiefkörper, über dem M als Vektorraum aufgefaßt werden kann.

Definition 1.4.1 Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann bezeichne $\operatorname{End}_R M$ die Menge aller **Endomorphismen** (dh. der homomorphen Selbstabbildungen von M) von M. Der Index R wird in Zukunft oft weggelassen, falls es nicht zu Verwechslungen kommen kann.

Lemma 1.4.2 (Schur) *Sei R ein Ring und M ein einfacher R-Modul. Dann bildet* $\operatorname{End} M$ *einen Schiefkörper (d.h. einen Körper mit nicht notwendigerweise kommutativer Multiplikation). Mit der Definition*

$$fm := f(m), \quad f \in \operatorname{End} M, m \in M,$$

wird M zu einem Vektorraum über $\operatorname{End} M$.

Beweis: Seien $f, g \in \operatorname{End} M$. Definiert man $(f+g)(m) := f(m)+g(m)$ und $(fg)(m) := f(g(m))$, dann erhält $\operatorname{End} M$ in natürlicher Weise Ringstruktur. Weiters liefert id_M ein Einselement. Da sowohl $\ker f$ als auch $f(M)$ Untermoduln von M sind, folgt aus der Einfachheit von M die Bijektivität von $f \neq 0$ und damit die Existenz inverser Elemente. Die Vektorraumaxiome können leicht nachgerechnet werden. $\square$

Folgerung 1.4.3 *Gelten die obigen Voraussetzungen, und faßt man M als Vektorraum über* $\operatorname{End} M$ *auf, dann ist jedes Element $a \in R$ eine lineare Abbildung von M.*

Beweis: Es gilt für $a \in R$, $f, g \in \operatorname{End} M$, $m, n \in M$:

$$a(fm + gn) = afm + agn = fam + gan$$

$\square$

Bemerkung 1.4.4 Ist M zusätzlich treu, dann heißt das, daß zwei verschiedenen Ringelementen zwei verschiedene lineare Abbildungen zugeordnet sind. Sind $a, b \in R$ nämlich gleiche Abbildungen auf M, dann folgt daraus $(a - b) \in \operatorname{Ann} M = 0$.

1.5 Die Struktur primitiver Ringe

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß jeder primitive Ring ein Ring linearer Abbildungen eines Vektorraums ist. Wir werden im Folgenden zeigen, daß jede beliebige lineare Abbildung an endlich vielen Stellen durch ein Ringelement interpoliert werden kann.

Lemma 1.5.1 *R sei ein Ring und M ein einfacher R-Modul. Weiters sei $m \in M$ ein strikt erzeugendes Element und $e \in R$ eine Rechtseins* mod $\operatorname{Ann} m$. *Dann gilt $em = m$.*

Beweis: Aus $ae - a \in \operatorname{Ann} m$ für alle $a \in R$ folgt $aem = am$ bzw. $a(em - m) = 0$. Wir definieren folgende Menge

$$N := \{n \in M \mid an = 0, \forall a \in R\}.$$

Man rechnet leicht nach, daß N ein Untermodul von M ist, und da $RM \neq 0$ vorausgesetzt ist, gilt $N = 0$. Daraus folgt $em = m$. □

Bemerkung 1.5.2 Nennt man für ein strikt erzeugendes Element m eines einfachen Moduls ein Element $e_m \in R$ eine **Rechtseins von** m, falls $e_m m = m$ erfüllt ist, dann folgt aus dem obigen Lemma, daß die Rechtseinselemente von m genau die Rechtseinselemente mod $\operatorname{Ann} m$ sind, und daß diese alle in einer $\operatorname{Ann} m$-Klasse liegen.

Definition 1.5.3 Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $n \in \mathbf{N}$. Dann bezeichnet $\operatorname{Hom}(M^n, M)$ die Menge aller Homomorphismen von M^n in M (M^n ist dabei das n-fache direkte Produkt von M).

Jetzt stehen uns alle Hilfsmittel zur Verfügung, um den Dichtesatz von Jacobson zu formulieren, der einen genaueren Einblick darin gibt, wie der Ring R auf M, aufgefaßt als Vektorraum über $\operatorname{End} M$, agiert. Wir geben hier einen Beweis, der vom Originalbeweis Jacobsons abweicht, jedoch deutlich die Möglichkeiten einer Verallgemeinerung auf Halbgruppen bzw. Ω-Halbgruppen zeigt.

Satz 1.5.4 (Jacobson) *R sei ein Ring und M ein einfacher R-Modul. $m_1, \ldots, m_n \in M \setminus \{0\}$ seien paarweise verschiedene Elemente. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} m_j$, $j = 2, \ldots, n$.
2. *Für alle $p_1, \ldots, p_n \in M$ gibt es ein $a \in R$ mit $am_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.*
3. *Die Elemente $m_1, \ldots, m_n$ sind linear unabhängig, wobei M als Vektorraum über* $\operatorname{End} M$ *aufgefaßt wird.*

Beweis: 1.⇒2.: Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion.

$n = 1$: m_1 ist ein strikt erzeugendes Element und daher existiert zu jedem $p \in M$ ein $a \in R$ mit $am_1 = p$.

$n-1 \to n$: Wegen $\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} m_j$, $j = 2, \ldots, n$, gilt im speziellen $\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} m_j$, $j = 2, \ldots, n-1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt daher die Existenz eines Elements $b \in R$ mit $bm_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Gesucht ist nun ein Element $c \in R$, sodaß für $a := b + c$ gilt: $am_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n$. Aus

$$am_i = bm_i + cm_i = p_i + cm_i, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

folgt $c \in \operatorname{Ann} m_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Weiters muß

$$cm_n = p_n - bm_n$$

gelten. Da $\bigcap_{i=1}^{n-1} \operatorname{Ann} m_i$ ein Linksideal ist, ist $(\bigcap_{i=1}^{n-1} \operatorname{Ann} m_i)m_n$ ein Untermodul von M. Aus $\bigcap_{i=1}^{n-1} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} m_n$ folgt

$$(\bigcap_{i=1}^{n-1} \operatorname{Ann} m_i)m_n \neq 0$$

und, da M keine nichttrivialen Untermoduln besitzt, damit die Existenz von c. $a = b + c$ leistet also das Gewünschte.

2.⇒3.: Angenommen 3. gelte nicht. O.B.d.A. sei daher $m_n = \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i m_i$, $\phi_i \in \operatorname{End} M$. Gibt man nun Elemente $p_1, \ldots, p_{n-1} \in M$ vor, dann gilt für alle $a \in R$ mit $am_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n-1$,

$$am_n = \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i p_i.$$

Es kann also kein Element p_n mehr beliebig gewählt werden, was im Widerspruch zu 2. steht.

3.⇒1.: Wir nehmen an, 1. sei nicht richtig. Dann bezeichne $k \geq 2$ den kleinsten Index mit $\bigcap_{i=1}^{k-1} \operatorname{Ann} m_i \subseteq \operatorname{Ann} m_k$. Es gilt also $\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} m_j$, $j = 2, \ldots, k-1$ (falls $k \geq 3$). 1. ist also für $m_1, \ldots, m_{k-1}$ erfüllt. Aus 2. folgt daher, daß für beliebig vorgegebene $p_1, \ldots, p_{k-1} \in M$ ein $a \in R$ existiert mit $am_i = p_i$, $i = 1, \ldots, k-1$ (für $k = 2$ gilt wegen $m_1 \neq 0$ dasselbe). Wir definieren nun folgende Abbildung $\phi : M^{k-1} \to M$:

$$\phi(p_1, \ldots, p_{k-1}) = \phi(a(m_1, \ldots, m_{k-1})) := am_k.$$

Zuerst ist zu zeigen, daß ϕ wohldefiniert ist. Seien also $a, b \in R$ Elemente mit $a(m_1, \ldots, m_{k-1}) = b(m_1, \ldots, m_{k-1})$. Dann gilt $(a-b)(m_1, \ldots, m_{k-1}) = 0$, was gleichbedeutend ist mit $(a-b) \in \bigcap_{i=1}^{k-1} \operatorname{Ann} m_i \subseteq \operatorname{Ann} m_k$. Man erhält somit $am_k = bm_k$.

Außerdem gilt für $c, d \in R$, $p_1, \ldots, p_{k-1}, l_1, \ldots, l_{k-1} \in M$:

$$\begin{aligned}
& \phi(c(p_1, \ldots, p_{k-1}) + d(l_1, \ldots, l_{k-1})) \\
= \; & \phi(ca(m_1, \ldots, m_{k-1}) + db(m_1, \ldots, m_{k-1})) \\
= \; & \phi((ca+db)(m_1, \ldots, m_{k-1})) \\
= \; & (ca+db)m_k \\
= \; & cam_k + dbm_k \\
= \; & c\phi(p_1, \ldots, p_{k-1}) + d\phi(l_1, \ldots, l_{k-1}).
\end{aligned}$$

ϕ ist daher ein Element von $\operatorname{Hom}(M^{k-1}, M)$.

Nun definieren wir folgende Abbildungen $\psi_i : M \to M$:

$$\psi_i(m) := \phi(0, \ldots, 0, m, 0, \ldots, 0), \quad i = 1, \ldots, k-1,$$

wobei m an der i-ten Stelle steht. Wegen $\phi \in \operatorname{Hom}(M^{k-1}, M)$ ist $\psi_i \in \operatorname{End} M$. Sei $e \in R$ ein Element mit

$$e(m_1, \ldots, m_{k-1}) = (m_1, \ldots, m_{k-1}).$$

Somit ist e eine Rechtseins mod $\operatorname{Ann} m_i$, $i = 1, \ldots, k-1$. Ist a ein beliebiges Ringelement, dann gilt $ae - a \in \bigcap_{i=1}^{k-1} \operatorname{Ann} m_i \subseteq \operatorname{Ann} m_k$. Daraus folgt, daß e auch eine Rechtseins mod $\operatorname{Ann} m_k$ ist. Benützt man Lemma 1.5.1 dann erhält man

$$\begin{aligned}
m_k &= em_k \\
&= \phi(e(m_1, \ldots, m_{k-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i m_i,
\end{aligned}$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $m_1, \ldots, m_n$. $\square$

Definition 1.5.5 Eigenschaft 2. im obigen Satz nennt man die **Interpolationseigenschaft** von R auf $m_1, \ldots, m_n \in M$. Man sagt R **interpoliert** an $m_1, \ldots, m_n$.

Das Bisherige läßt sich folgendermaßen zusammenfassen: Zu jedem Ring R gibt es ein eindeutig bestimmtes kleinstes Ideal $J(R)$, sodaß für den Faktorring $J(R/J(R)) = 0$ gilt. Weiters gilt $J(R) = 0$ genau dann, wenn R ein subdirektes Produkt primitiver Ringe ist. Jeder primitive Ring ist ein Ring linearer Abbildungen eines Vektorraums über einem Schiefkörper, wobei R, für alle natürlichen Zahlen n, an je n linear unabhängigen Stellen interpoliert. Diese Eigenschaft kann man auch folgendermaßen umformulieren:

Definition 1.5.6 Sei V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K. Eine Menge A linearer Abbildungen heißt **dicht**, wenn zu jeder linearen Abbildung $l : V \to V$, jeder natürlichen Zahl n und $m_1, \ldots, m_n \in V$ eine Abbildung $a \in A$ existiert, mit $a(m_i) = l(m_i)$.

Folgerung 1.5.7 *Sei R ein Ring. Dann sind die Aussagen 1. und 2. äquivalent.*

1. *R ist primitiv.*

2. *R ist ein dichter Ring linearer Abbildungen eines Vektorraums über einem Schiefkörper.*

Beweis: 1.⇒2.: M sei ein treuer, einfacher R-Modul. Wir fassen M nach Lemma 1.4.2 als Vektorraum über $\operatorname{End} M$ auf. Seien l eine lineare Abbildung von M und $m_1, \ldots, m_n \in M$ beliebige Elemente. Wir greifen daraus eine maximale linear unabhängige Menge heraus, welche o.B.d.A. $\{m_1, \ldots, m_k\}$ sei, $k \leq n$. Nach Satz 1.5.4 gibt es ein $a \in R$, mit $am_i = lm_i$, $i = 1, \ldots, k$. Da $\{m_1, \ldots, m_k\}$ maximal linear unabhängig gewählt wurde, gilt auch $am_i = lm_i$, $i = 1, \ldots, n$. R ist also dicht.

2.⇒1.: M sei ein Vektorraum und R ein dichter Ring linearer Abbildungen. M kann als R-Modul aufgefaßt werden. Da verschiedene Elemente aus R verschiedene Abbildungen sind, gilt nur für $0 \in R$ $0m = 0$ für alle $m \in M$. M ist also treu. Sei $m \in M$ ein von 0 verschiedener Vektor. Dann gibt es für jeden Vektor $n \in M$ eine lineare Abbildung l mit $lm = n$. Da R dicht ist, gibt es ein $a \in R$ mit $am = n$ woraus $Rm = M$ folgt. Das ist gleichbedeutend damit, daß M einfach ist. R ist somit ein primitiver Ring. □

Bemerkung 1.5.8 Da jede lineare Abbildung bereits durch die Bilder einer Basis bestimmt ist, und jede linear unabhängige Menge von Vektoren zu einer Basis verlängert werden kann, ist die Eigenschaft an je n linear unabhängigen Stellen zu interpolieren, für alle natürlichen Zahlen n, äquivalent zur Dichteeigenschaft.

1.6 Bemerkungen zum Fastringfall

Will man die bei Ringen gewonnenen Ergebnisse auf andere algebraische Strukturen verallgemeinern, dann ist es naheliegend vorerst Fastringe zu studieren, da sie eine ähnliche Struktur besitzen. Trotz der Gemeinsamkeiten zeigt sich jedoch schon hier, welche Schwierigkeiten bei einer Übertragung der Resultate zu erwarten sind.

Definition 1.6.1 Eine Algebra $(F, +, \cdot)$ heißt **Fastring**, falls $(F, +)$ eine Gruppe und $(F, \cdot)$ eine Halbgruppe bilden, und das Distributivgesetz

$$(a + b)c = ac + bc$$

für alle $a, b, c \in F$ gilt. Sei F ein Fastring. Dann nennt man eine Algebra $(M, +, F)$ eine F**-Gruppe** (das Analogon zum Modul), wenn $(M, +)$ eine Gruppe ist, und

$$(a + b)m = am + bm$$

für alle $a, b \in F$, $m \in M$ gilt.

Bei Fastringen tritt nun z.B. das Problem auf, daß F-Untergruppen und Kongruenzrelationen auf F nicht mehr übereinstimmen. Weiters folgt nicht wie bei R-Moduln, das eine F-Gruppe M, die keine F-Untergruppen außer $\{0\}$ und M enthält, automatisch $Fm = M$ für alle $m \in M$ erfüllt. Im Fastringfall definiert man daher drei verschiedene Typen von einfachen bzw. irreduziblen F-Gruppen (man spricht bei Fastringen von einer F-Gruppe vom Typ 0,1 bzw. 2), die dann zur Definition jeweiliger Radikalbegriffe herangezogen werden.

Weiters trägt eine zu einem primitiven Fastring gehörige F-Gruppe M nicht die Struktur eines Vektorraums wie im Ringfall, weshalb eine Formulierung des Jacobsonschen Dichtesatzes mit Hilfe der linearen Unabhängigkeit nicht möglich ist. Man benötigt daher einen allgemeineren Unabhängigkeitsbegriff, wobei man dazu Formulierung 1. aus Satz 1.5.4 zur Charakterisierung der Interpolationseigenschaft heranzieht. Für 1-primitive Fastringe (d.h. Fastringe mit einer treuen F-Gruppe vom Typ 1) gilt z.B. folgender Satz:

Satz 1.6.2 *([Ram1], Theorem 4). Sei F ein 0-symmetrischer (d.h. $a0 = 0$ für alle $a \in F$), 1-primitiver Fastring, der kein Ring ist, mit zugehöriger F-Gruppe M. Für strikt erzeugende Elemente $m_1, \ldots, m_n \in M$ sind folgende Aussagen äquivalent (es gilt nicht wie bei Ringen, daß jedes $m \in M$, $m \neq 0$, strikt erzeugend ist):*

1. $\operatorname{Ann} m_i \neq \operatorname{Ann} m_j$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

2. *Für alle $p_1, \ldots, p_n \in M$ existiert ein $a \in F$ mit $am_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis: Siehe [Ram1]. □

Auch bei Halbgruppen werden wir sehen, daß sich ähnliche Probleme ergeben. Im dritten Kapitel bei der Untersuchung von Ω-Halbgruppen, dem allgemeinsten hier behandelten Fall, treten dann auch erwartungsgemäß die größten Schwierigkeiten auf.

Kapitel 2

Die Situation bei Halbgruppen

2.1 Definitionen

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Definitionen zur Untersuchung des Halbgruppenfalls gebracht werden. Die meisten Begriffe sind analog zu den Begriffen in der Ringtheorie. Da aber bei Halbgruppen nicht derselbe Zusammenhang zwischen Idealen und Kongruenzrelationen besteht wie bei Ringen, müssen einige Definitionen umformuliert werden.

Definition 2.1.1 Eine Algebra $(S, \star)$ heißt **Halbgruppe**, wenn $\star$ eine binäre, assoziative Operation ist, d.h. wenn für alle $a, b, c \in S$

$$a(bc) = (ab)c$$

gilt ($\star$ wird in Zukunft weggelassen).

Ein **(Links)-S-System** (in der Literatur oft auch S**-act**) ist eine Algebra (M, S), wobei S als Halbgruppe auf M operiert. Für jedes $a \in S$ gilt also $a : M \to M$ und

$$(ab)m = a(bm), \quad a, b \in S, m \in M.$$

Sei M ein S-System, dann bezeichnet $\operatorname{Con} M$ den Verband aller Kongruenzrelationen von M. Weiters bezeichne $\Delta := \{(m, m) \mid m \in M\}$ die **identische Relation** und $\nabla := M \times M$ die **Allrelation**. Im Fall $\operatorname{Con} M = \{\Delta, \nabla\}$ nennen wir M **einfach**.

$N \subseteq M$ heißt S**-Untersystem** (i.Z. $N \leq M$), wenn $SN \subseteq N$ gilt. M heißt **irreduzibel**, wenn M keine S-Untersysteme außer M und einelementige S-Untersysteme besitzt. Diese nennt man die **trivialen** S**-Untersysteme** von M.

M^n, $n \in \mathbf{N}$, bezeichnet das n**-fache direkte Produkt** von M, dabei definiert man $a(m_1, \ldots, m_n) := (am_1, \ldots, am_n)$.

Für jedes Element $m \in M$ definiert man den **Annulator von** m durch

$$\operatorname{Ann} m := \{(a, b) \in S \times S \mid am = bm\}.$$

Der **Annulator von** M ist definiert als

$$\operatorname{Ann} M := \bigcap_{m \in M} \operatorname{Ann} m.$$

Analog zum Ringfall rechnet man nach, daß $\operatorname{Ann} M$ eine Kongruenzrelation von S ist. Ist $\operatorname{Ann} M = \Delta$, dann nennt man M ein **treues** S-System.

Das **(einfache) Radikal** $P(S)$ einer Halbgruppe S ist folgende Kongruenzrelation:

$$P(S) := \bigcap_{M} \operatorname{Ann} M,$$

wobei der Durchschnitt über alle einfachen S-Systeme gebildet wird. Gilt $P(S) = \Delta$, dann nennt man S **halbeinfach**.

S-Systeme sind im Halbgruppenfall Algebren ohne innere Operation. Durch diesen Verlust an Struktur ist deren Behandlung manchmal zwar leichter als im Ringfall (z.B. ist eine Teilmenge $N \subseteq M$ mit $SN \subseteq N$ schon ein S-Untersystem), oft erweist sich das aber auch als Nachteil.

Bemerkung 2.1.2 Wie auch bei Ringen erfüllt das einfache Radikal einer Halbgruppe folgende zwei Eigenschaften:

1. Sei $f : S \to f(S)$ ein Homomorphismus. Dann gilt $f(P(S)) \subseteq P(f(S))$, wobei $f(P(S))$ komponentenweise gebildet wird.

2. $P(S/P(S)) = \Delta$.

Daraus folgt wieder, daß $P(S)$ die kleinste Kongruenzrelation mit halbeinfachem Faktor ist.

Bemerkung 2.1.3 Operiert S auf dem S-System M, dann ist jedem Element $a \in S$ eine Abbildung von M in M zugeordnet. Diese Zuordnung ist ein Homomorphismus von S in M^M. Man nennt das auch eine **Darstellung** von S als Halbgruppe von Abbildungen. Ist M treu, dann bedeutet das, daß dieser Homomorphismus injektiv ist. Zwei verschiedene Halbgruppenelemente operieren dann auch verschieden auf M.

Beispiel 2.1.4 Jede Halbgruppe S kann als S-System über sich selbst aufgefaßt werden. Ist M eine beliebige Menge, dann ist jede bezüglich der Hintereinanderausführung abgeschlossene Teilmenge S von M^M eine Halbgruppe und M somit ein S-System.

2.2 Eigenschaften von S-Systemen

S-Systeme spielen für Halbgruppen eine ähnlich wichtige Rolle wie Moduln bei Ringen. In diesem Abschnitt wollen wir einige grundlegenden Begriffe und Eigenschaften darlegen. Wir halten uns dabei zum Großteil an [Hoe1].

Definition 2.2.1 Sei M ein S-System. Ein Element $m \in M$ heißt **strikt erzeugendes Element**, wenn $Sm = M$ gilt. $m_0 \in M$ heißt **Fixelement**, wenn $Sm_0 = m_0$ gilt. Das S-System heißt **strikt zyklisch**, wenn es ein strikt erzeugendes Element enthält und **stark zyklisch**, wenn jedes Element, das kein Fixelement ist, strikt erzeugend ist.

Bemerkung 2.2.2 Ist $m \in M$ nicht strikt erzeugend, dann auch am für alle $a \in S$. Die nicht strikt erzeugenden Elemente bilden also ein S-Untersystem. Ebenso bilden die Fixelemente ein S-Untersystem.

Satz 2.2.3 *Sei S eine Halbgruppe und M ein irreduzibles S-System mit mehr als zwei Elementen. Dann existiert höchstens ein Fixelement m_0. Alle anderen S-Systemelemente sind strikt erzeugend (dh.: M ist stark zyklisch). Ist $1_l \in S$ ein Linkseinselement (d.h. $1_l a = a$ für alle $a \in S$), dann gilt $1_l m = m$ für alle $m \in M$.*

Beweis: Seien $m_0, m_1 \in M$ Fixelemente. Dann gilt $\{m_0, m_1\} \leq M$. Aus $|M| > 2$ und der Irreduzibilität erhält man $m_0 = m_1$.

Sei nun $m \in M$ ein beliebiges Element. Wenn m nicht strikt erzeugend ist, dann ist $Sm \leq M$ und daher $Sm = m'$. Daraus folgt $\{m, m'\} \leq M$, und man erhält $m = m'$. m ist also ein Fixelement.

Für jedes $m \in M$ gibt es nach dem bisher gezeigten ein $e \in R$ mit $em = m$. Wir erhalten $1_l m = 1_l em = m$. □

Wie im Ringfall spielen die Annulatoren der S-Systemelemente auch hier eine wichtige Rolle. Modularität und Rechtseinselemente werden analog zum Ringfall definiert.

Definition 2.2.4 Eine Äquivalenzrelation Θ auf S heißt **Linkskongruenzrelation**, falls für alle $c \in S$ aus $(a, b) \in \Theta$ stets $(ca, cb) \in \Theta$ folgt. Die Menge aller Linkskongruenzen auf S bezeichnen wir mit $\operatorname{LCon} S$.

Θ heißt **modular**, wenn ein Element $e \in S$ existiert, mit $(a, ae) \in \Theta$ für alle $a \in S$. e nennt man ein **Rechtseinselement** mod Θ oder auch eine **Rechtseins**. Θ heißt **maximal**, wenn es kein $\Psi \neq \nabla$, $\Psi \in \operatorname{LCon} S$ gibt mit $\Theta < \Psi$.

Bemerkung 2.2.5 Sei M ein S-System. Dann rechnet man leicht nach, daß $\operatorname{Ann} m$, $m \in M$, stets eine Linkskongruenz ist.

Lemma 2.2.6 *Sei S eine Halbgruppe. Faßt man S als S-System über sich selbt auf, dann entsprechen den Kongruenzen von S als S-System genau die Linkskongruenzen von S als Halbgruppe. Die Linkskongruenzen von S sind daher genau die Kerne der auf S definierten S-System-Homomorphismen.*

Beweis: Sei Θ eine S-System-Kongruenz, dh. für $(a, b) \in \Theta$ folgt $(ca, cb) \in \Theta$ für alle $c \in S$. Das ist aber gleichbedeutend mit $\Theta \in \operatorname{LCon} S$. □

Lemma 2.2.7 *Sei S eine Halbgruppe und Θ eine modulare Linkskongruenz. Gilt $\Psi \geq \Theta$, $\Psi \in \operatorname{LCon} S$, dann ist auch Ψ modular.*

Beweis: Sei e eine Rechtseins mod Θ. Dann ist e wegen $(a, ae) \in \Theta \leq \Psi$ auch eine Rechtseins mod Ψ. □

Für ein S-Systemelement läßt sich die Eigenschaft, strikt erzeugend zu sein, folgendermaßen mit Hilfe seines Annulators charakterisieren:

Satz 2.2.8 *Sei M ein S-System. Dann ist ein Element $m \in M$ genau dann strikt erzeugend, wenn folgende Aussagen gelten:*

1. $\operatorname{Ann} m$ *ist modular.*

2. $M \cong S/\operatorname{Ann} m$ *mit* $m \mapsto [e]_{\operatorname{Ann} m}$, *wobei* e *eine Rechtseins* mod $\operatorname{Ann} m$ *ist.*

Beweis: $\Rightarrow$: Da m strikt erzeugend ist, gibt es ein $e \in S$ mit $em = m$. Wegen $aem = am$, $a \in S$ beliebig, ist e eine Rechtseins mod $\operatorname{Ann} m$. Die Abbildung $\phi : S \to M$, $a \mapsto am$ ist wegen $\phi(ba) = bam = b\phi(a)$ ein surjektiver Homomorphismus mit $\ker \phi = \operatorname{Ann} m$ und $\phi(e) = m$. Der Rest der Behauptung folgt mit dem Homomorphiesatz.

$\Leftarrow$: Sei e eine Rechtseins mod $\operatorname{Ann} m$ und ϕ ein Isomorphismus zwischen $S/\operatorname{Ann} m$ und M mit $[e]_{\operatorname{Ann} m} \mapsto m$. Da e eine Rechtseins ist, gilt $a[e]_{\operatorname{Ann} m} = [a]_{\operatorname{Ann} m}$ für alle $a \in S$. $[e]_{\operatorname{Ann} m}$ ist also ein strikt Erzeugendes von $S/\operatorname{Ann} m$. Via ϕ erweist sich m als strikt Erzeugendes von M. $\Box$

Bemerkung 2.2.9 Der obige Satz ist in der Form

$$Sm = M \Leftrightarrow \operatorname{Ann} m \text{ modular}, M \cong S/\operatorname{Ann} m$$

falsch, wie folgendes Beispiel zeigt:

S sei die multiplikative Halbgruppe der natürlichen Zahlen und $M = S$ S-System über sich selbst. Da S kürzbar ist, gilt $\operatorname{Ann} 2 = \Delta$. Wegen $1 \in S$ ist Δ modular, und es gilt $\mathbf{N} \cong \mathbf{N}/\operatorname{Ann} 2$. 2 ist aber kein strikt erzeugendes Element von $\mathbf{N}$. (2 erzeugt $2\mathbf{N} \cong \mathbf{N}$).

2.3 Einfache S-Systeme

Im Weiteren werden wir uns hauptsächlich für einfache S-Systeme interessieren, da diese aufgrund der Definition des Radikals von Interesse sind. Für spätere Untersuchungen wichtige Eigenschaften einfacher S-Systeme werden in diesem Abschnitt gezeigt. Wieder stammen die meisten Aussagen aus [Hoe1].

Definition 2.3.1 Sei N ein S-Untersystem von M. Dann definieren wir folgende Äquivalenzrelation:

$$\Theta_N := (N \times N) \cup \{(m, m) \in M \times M \mid m \notin N\}.$$

Θ_N nennt man die von N erzeugte **Rees-Kongruenz**.

Lemma 2.3.2 *Sei Θ_N wie oben definiert. Dann ist Θ_N eine Kongruenzrelation auf M.*

Beweis: Gilt $m, n \in N$ dann für alle $a \in S$ auch $am, an \in N$, für $m = n$, $m \notin N$, folgt $am = an$. □

Satz 2.3.3 *Sei M ein einfaches S-System. Dann ist M auch irreduzibel.*

Beweis: Sei $N \leq M$ und Θ_N die zugehörige Rees-Kongruenz. Dann gilt $\Theta_N = \Delta$ oder $\Theta_N = \nabla$. Daher ist $|N| = 1$ oder $N = M$. □

Bemerkung 2.3.4 Mit Hilfe dieses Satzes können wir bei einfachen S-Systemen Satz 2.2.3 anwenden. Jedes einfache S-System mit mehr als zwei Elementen ist also stark zyklisch und besitzt höchstens ein Fixelement. Die Forderung, daß M mindestens drei Elemente hat, ist keine wirkliche Einschränkung. Sei $M = \{1, 2\}$ ein treues (nur solche sind für uns interessant, siehe Abschnitt 2.5), zweielementiges S-System (dh. automatisch auch einfach). Dann ist S nach Bemerkung 2.1.3 eine Unterhalbgruppe von $M^M = \{\mathrm{id}, 1, 2, (12)\}$. Somit sind alle S mit treuem, zweielementigen S-System bekannt. **AB JETZT GELTE** $|M| > 2$, falls nicht anders erwähnt. Weiters bezeichnen wir von nun an ein mögliches Fixelement mit m_0.

Analog zum Ringfall gilt

Satz 2.3.5 *Sei M ein einfaches S-System. Für alle $m \neq m_0$ ist $\operatorname{Ann} M$ die größte in $\operatorname{Ann} m$ enthaltene Kongruenzrelation.*

Beweis: $\operatorname{Ann} M$ ist nach Definition eine Kongruenzrelation. Sei nun $\Theta \in \operatorname{Con} S$ mit $\Theta \leq \operatorname{Ann} m$. Aus $(a, b) \in \Theta \subseteq \operatorname{Ann} m$ folgt $(ac, bc) \in \Theta \leq \operatorname{Ann} m$ für alle $c \in S$. Da m strikt erzeugend ist, gilt für beliebiges $n \in M$ und passendes $c \in S$: $an = acm = bcm = bn$, also $(a, b) \in \operatorname{Ann} n$ und somit $\Theta \leq \operatorname{Ann} M$. □

Definition 2.3.6 M sei ein S-System. Wie im Ringfall bezeichnet $\operatorname{End}_S M$ die Menge aller Endomorphismen und $\operatorname{Aut}_S M$ die Menge aller Automorphismen von M. (Der Index S wird wieder weggelassen, wenn keine Verwechslungen möglich sind). Eine Algebra $(G = G' \cup \{0\}, \star)$ heißt **Gruppe mit 0**, wenn $(G', \star)$ eine Gruppe ist, und $0g = g0 = 0$ für alle $g \in G'$ gilt.

Satz 2.3.7 *Sei M ein einfaches S-System. Dann gilt*

$$\operatorname{End} M = \operatorname{Aut} M \text{ bzw. } \operatorname{End} M = \operatorname{Aut} M \cup \{m_0\},$$

wobei m_0 die konstante Abbildung mit Wert m_0 bezeichnet. $\operatorname{End} M$ *ist also entweder eine Gruppe oder eine Gruppe mit 0.*

Beweis: Sei $\phi \in \operatorname{End} M$. Dann gilt entweder $\ker \phi = \Delta$ oder $\ker \phi = \nabla$. Weiters ist $\phi M \leq M$. Damit ist ϕ enweder ein Automorphismus oder konstant, da M irreduzibel ist. □

Analog zum Lemma von Schur kann M auch als $(\operatorname{End} M)$-System aufgefaßt werden. Bisher wissen wir, daß $\operatorname{End} M$ eine Gruppe bzw. eine Gruppe mit 0 ist. Die genauere Struktur dieser Gruppe werden wir in Abschnitt 2.12 untersuchen.

Satz 2.3.8 *Sei M ein einfaches S-System. Wenn M ein Fixelement m_0 enthält, dann gilt:*

1. *$|M| < \infty$, M treu $\Rightarrow 0 \in S$. ($|M| < \infty$ gilt nach Satz 2.2.8 speziell dann, wenn S endlich ist).*

2. *$|M| = \infty \Rightarrow$ für jedes $n \in \mathbf{N}$, $m_1, \ldots, m_n \in M \setminus \{m_0\}$, gibt es ein $a_n \in S$ mit $a_n m_i = m_0$, $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis: 2.: M ist stark zyklisch mit genau einem Fixelement m_0. Wegen $m_1 \neq m_0$ gibt es ein $b_1 \in S$ mit $b_1 m_1 = m_0$. Ist $b_1 m_2 \neq m_0$, dann gibt es ein b_2 mit

$$b_2 b_1 m_2 = b_2 b_1 m_1 = m_0. \tag{2.1}$$

Ist $b_1 m_2 = m_0$, dann gilt (2.1) für alle $b_2 \in S$. Fährt man so fort, dann leistet $a_n := b_n b_{n-1} \cdots b_1$ das Gewünschte.

1.: Sei $M = \{m_0, m_1, \ldots, m_n\}$. Aus 2. folgt die Existenz eines Elements $a \in S$ mit $a m_i = m_0$, $i = 1, \ldots, n$. Sei $b \in S$ beliebig. Für alle $m \in M$ gilt $(ba)m = b(am) = m_0 = a(bm) = (ab)m$. Da M treu ist, folgt $ab = ba = a$ für alle $b \in S$. a ist somit Nullelement. □

Bei einfachen S-Systemen vereinfacht sich auch die Charakterisierung strikt erzeugender Elemente nach Satz 2.2.8, da jedes Nichtfixelement strikt erzeugend ist. Es gilt somit folgender

Satz 2.3.9 *Sei M ein einfaches S-System. Dann sind äquivalent:*

1. *$m \in M$ ist strikt erzeugend.*

2. *m ist kein Fixelement.*

3. $\operatorname{Ann} m$ *ist modular und maximal.*

4. $\operatorname{Ann} m \neq \nabla$.

Eine Antwort auf die Frage, wann eine Halbgruppe S ein einfaches S-System M besitzt, liefert

Satz 2.3.10 *S besitzt ein einfaches S-System M ($|M| > 2$) genau dann, wenn es in* $\operatorname{LCon} S$ *eine maximale Linkskongruenz Θ mit mehr als zwei Klassen gibt. Es gilt dann $M \cong S/\Theta$. Weiters ist höchstens eine Θ-Klasse $[a_0]_\Theta$ ein Linksideal, und es gilt $S^2 \not\subseteq [a_0]_\Theta$.*

Beweis: Gibt es eine maximale Linkskongruenz Θ, dann ist S/Θ ein einfaches S-System. Umgekehrt ist jedes Nichtfixelement m eines einfachen S-Systems strikt erzeugend und nach Satz 2.2.8 gilt $M \cong S/\operatorname{Ann} m$. Nach obigem Satz ist $\operatorname{Ann} m$ maximal.

Jede Θ-Klasse, die ein Linksideal ist, liefert in M ein Fixelement. Da es nur höchstens eines geben kann, und alle anderen Elemente aus M strikt erzeugend sind, folgt der Rest der Behauptung. □

Betrachtet man obigen Satz, dann bemerkt man, daß zu jeder maximalen Linkskongruenz Θ (mit mehr als zwei Klassen) eine maximale, modulare Linkskongruenz $\operatorname{Ann} m$ existiert, mit $S/\Theta \cong S/\operatorname{Ann} m$. Es stellt sich die Frage, ob jede maximale Linkskongruenz auch modular ist. In [Hoe1] (S.457 oben) wird ein Beispiel einer Halbgruppe mit einer maximalen Linkskongruenz gegeben, die nicht modular ist. Da diese Linkskongruenz aber nur zwei Klassen hat und darüber hinaus das resultierende S-System aus zwei Fixelementen besteht, beantwortet dieses Beispiel unsere Frage nicht. Es kann aber Folgendes ausgesagt werden (und damit ist speziell für kommutative Halbgruppen die Frage gelöst):

Satz 2.3.11 *Sei S eine Halbgruppe und Θ eine maximale Linkskongruenz (mit mehr als zwei Klassen), die auch eine Kongruenz ist, dann ist Θ modular.*

Beweis: Sei $M \cong S/\Theta$ das zugehörige S-System und $[a]_\Theta \in M$. Es gilt $\operatorname{Ann}[a]_\Theta = \{(c,d) \in S \times S \mid ca\Theta da\}$. Da Θ eine Kongruenzrelation ist, erhält man $\Theta \leq \operatorname{Ann}[a]_\Theta$ und wegen der Maximalität $\Theta = \operatorname{Ann}[a]_\Theta$, falls $[a]_\Theta$ ein strikt Erzeugendes ist. Annulatoren strikt erzeugender Elemente sind aber immer modular. $\square$

Eine weitere wichtige Eigenschaft einfacher S-Systeme ist die Punktetrennung. Es gilt nämlich:

Lemma 2.3.12 *Sei M ein einfaches S-System. Dann existiert für alle Elemente $m, n \in M$, $m \neq n$, ein Element $a \in S$ mit $am \neq an$.*

Beweis: Wir betrachten folgende Relation

$$\Phi := \{(m,n) \in M \times M \mid am = an, \forall a \in S\}.$$

Man sieht sofort, daß mit (m,n) für jedes $a \in S$ auch (am, an) in Φ liegt. Φ ist also eine Kongruenzrelation auf M und damit gilt $\Phi = \Delta$ oder $\Phi = \nabla$. Aus $\Phi = \nabla$ folgt $a(am) = am$ für alle $a \in S$ und alle strikt Erzeugenden $m \in M$. Es ist also jedes Element aus M ein Fixelement im Widerspruch zu $|M| > 2$. $\Phi = \Delta$ ist aber gleichbedeutend mit der gewünschten Eigenschaft. $\square$

Bemerkung 2.3.13 In [Hoe2] wird Folgendes bewiesen: I sei ein Ideal der Halbgruppe S und M ein einfaches I-System. Gibt es Elemente $m, n \in M, b \in I$, mit $bm \neq bn$, dann kann man am für alle $a \in S$, $m \in M$ so definieren (wobei bm für $b \in I$ mit der ursprünglichen Definition übereinstimmt), daß M zu einem S-System wird.

Es wird weiters die Frage gestellt, ob die obige Bedingung auch weggelassen werden kann, das heißt, ob ein einfaches I-System für ein Ideal I immer zu einem S-System gemacht werden kann. Wie folgendes Beispiel zeigt, ist das nicht der Fall: Aus dem vorhergehenden Lemma folgt, daß M nur höchstens zwei Elemente besitzen kann, falls die Bedingung verletzt sein soll. Der einelementige Fall ist trivial. Sei daher $M := \{m, n\}$. Wir betrachten $S := \{a, b, c, d\}$ mit $ax := a$, $bx := b$, $cx := c$ für alle $x \in S$ und $da := a$, $db = dc = c$, $dd = d$. Man prüft leicht nach, daß S eine Halbgruppe und $I := \{a, b, c\}$ ein Ideal von S ist. Definieren wir $am := an := bm := bn = n$ und $cm := cn := m$, dann wird M zu einem einfachen I-System. Wegen

$$dn = dam = am = n \neq m = cm = dbm = dn$$

kann aber M nicht zu einem S-System gemacht werden.

Bemerkung 2.3.14 Die Umkehrung von Lemma 2.3.12 gilt nicht. Ist S auf M punktetrennend, dann auch auf M^2. M^2 ist aber nicht einfach (die Projektionen sind nichttriviale Homomorphismen). Eine der Punktetrennung ähnliche Eigenschaft liefert aber eine hinreichende Bedingung für ein S-System M, einfach zu sein.

Satz 2.3.15 *Sei M ein S-System. Gibt es für alle $N \subseteq M$, $N \neq M$, $|N| \geq 2$, Elemente $m, n \in N$, $a \in S$, mit $am \in N$, $an \in M \setminus N$, dann ist M einfach.*

Beweis: Sei Θ eine Äquivalenzrelation auf M mit $\Theta \neq \Delta$, $\Theta \neq \nabla$. Wir wählen eine Klasse $[m]_\Theta \neq \{m\}, M$ und setzen $N := [m]_\Theta$. Laut Voraussetzung gibt es Elemente $p, q \in M$, $p\Theta m\Theta q$, und ein $a \in S$ mit $(ap, m) \in \Theta$, $(aq, m) \notin \Theta$. Θ ist also keine Kongruenzrelation und M damit einfach. □

Um Folgerung 2.3.18 zu formulieren, benötigen wir einige Definitionen, die durch die Untersuchungen des Ringfalls motiviert sind.

Definition 2.3.16 Sei S eine Halbgruppe und M ein S-System. Wir sagen S **interpoliert** auf $m_1, \ldots, m_n \in M$, wenn für beliebige $p_1, \ldots, p_n \in M$ ein $a \in S$ existiert, mit

$$am_i = p_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

S interpoliert an **höchstens** n **Stellen**, wenn es keine Elemente $m_1, \ldots, m_{n+1} \in M$ gibt, auf denen S interpoliert.

S hat die n**-Interpolationseigenschaft** (i.Z. n**-IPE**), wenn S auf allen $m_1, \ldots, m_n \in M \setminus \{m_0\}$, m_i paarweise verschieden, interpoliert.

S ist **dicht in** M^M, falls S für alle $n \in \mathbf{N}$ die n-Interpolationseigenschaft hat.

S ist **dicht in** $T \subseteq M^M$, falls für jedes $f \in T$ jedes $n \in \mathbf{N}$ und beliebige $m_1, \ldots, m_n \in M$ ein $a \in S$ existiert, das mit f an $m_1, \ldots, m_n$ übereinstimmt.

Beispiel 2.3.17 M^M ist natürlich dicht in M^M, für jede Menge M. Ist M ein Körper, dann ist die Menge der Polynomfunktionen dicht in M^M. In Kapitel 1 haben wir gesehen, daß ein primitiver Ring R ein Ring linearer Abbildungen eines Vektorraums R ist, der in der Menge aller linearen Abbildungen dicht ist.

Folgerung 2.3.18 *M sei ein S-System. Hat S die 2-IPE, dann ist M einfach.*

Beweis: Folgt direkt aus Satz 2.3.15. □

2.4 Freie S-Systeme

In diesem Abschnitt werden freie S-Systeme bei gegebener Halbgruppe S charakterisiert. Außerdem wird untersucht, wann ein freies S-System einfach ist.

Definition 2.4.1 Sei S eine Halbgruppe, dann definieren wir folgende Halbgruppe S^1:

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{falls } 1 \in S \\ S \cup \{1\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Im zweiten Fall setzt man für ein Element $a \in S$ $1a = a1 = a$. Analog definiert man S^0.

Sei M ein S-System und $N \subseteq M$. Dann bezeichnet $\langle N \rangle$ das **von N erzeugte S-Untersystem**, d.h. das kleinste S-Untersystem, das N enthält. N **erzeugt** M, wenn $\langle N \rangle = M$ gilt. Gilt $\langle m \rangle = M$ für ein $m \in M$, dann nennt man m ein **erzeugendes Element** und M **zyklisch**.

Ein S-System F heißt **frei über der Erzeugendenmenge** $X \subseteq F$, wenn $\langle X \rangle = F$ gilt, und es für jedes S-System M und jede Abbildung $f : X \to M$ einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $f^* : F \to M$ gibt, mit $fx = f^*x$ für alle $x \in X$. Ein S-System F heißt **frei**, wenn es eine Menge $X \subseteq F$ gibt, sodaß F frei über X ist. (Freie S-Systeme existieren, siehe z.B. [Ihr1], Kapitel 6).

Bemerkung 2.4.2 Für ein S-System M und $N \subseteq M$ gilt $\langle N \rangle = SN \cup N$, da $SN \cup N \subseteq \langle N \rangle$ gilt, und $SN \cup N$ ein S-Untersystem ist. Man sagt, daß N das S-System M **strikt erzeugt**, falls $SN = M$ gilt, was für $N = \{m\}$ mit Definition 2.2.1 übereinstimmt.

Satz 2.4.3 *F sei ein S System. Dann sind äquivalent:*

1. *F ist frei.*

2. *Es gibt eine Menge $X = \{x_i\}_{i \in I} \subseteq F$, sodaß F disjunkte Vereinigung der S-Untersysteme $\langle x_i \rangle = Sx_i \cup \{x_i\}$ ist, mit $\mathrm{Ann}_{S^1} x_i = \Delta$ für alle $i \in I$. (Faßt man F als S^1-System auf, dann bezeichnen wir in diesem Fall den Annulator von $x \in F$ mit $\mathrm{Ann}_{S^1} x$.)*

3. *Es gibt ein $\Theta \in \operatorname{Con} F$, sodaß jede Θ-Klasse $[m]_\Theta$ ein zyklisches S-Untersystem ist, mit einem Erzeugenden $n \in [m]_\Theta$, für das $\operatorname{Ann}_{S^1} n = \Delta$ gilt.*

Beweis: 1.⇒2.: F sei frei über der Menge X, daher gilt $F = \langle X \rangle$. Wir zeigen $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \emptyset$ für $x, y \in X$, $x \neq y$. Angenommen es gibt Elemente $a, b \in S$ mit $ax = by$. Betrachtet man das S-System $(S^1)^0$ und eine Abbildung f mit $x \mapsto 1, y \mapsto 0$, dann gilt $a1 = a \neq 0 = b0$ im Widerspruch zu $f^*(ax) = f^*(by)$.

Es bleibt $\operatorname{Ann}_{S^1} x = \Delta$ zu zeigen. Angenommen es gibt $a, b \in S^1$, $a \neq b$, mit $ax = bx$. Wir betrachten das S-System S^1 und eine Abbildung f mit $x \mapsto 1$. Dann gilt $a1 = a \neq b = b1$ wieder im Widerspruch zu $f^*(ax) = f^*(bx)$.

2.⇒3.: Die Partition von F aus 2. liefert die gewünschte Kongruenzrelation.

3.⇒1.: Wir wählen unter Benützung des Auswahlaxioms aus jeder Θ-Klasse ein Erzeugendes n mit $\operatorname{Ann}_{s^1} n = \Delta$ aus und bezeichnen die Menge aller dieser n mit N. Dann gilt $F = \bigcup_{n \in N} \langle n \rangle$. Sei nun M ein beliebiges S-System und $f : N \to M$ eine beliebige Abbildung. Da sich jedes Element $p \in F$ eindeutig (wegen $\operatorname{Ann}_{S^1} n = \Delta$) als $a_p n$, $a_p \in S^1$, für ein $n \in N$ darstellen läßt, ist die Abbildung

$$f^* : F \to M, p \mapsto a_p f n$$

die gesuchte homomorphe Fortsetzung von f. □

Mit Hilfe dieser Charakterisierung kann man sofort die einfachen, freien S-Systeme bestimmen.

Folgerung 2.4.4 *Ein S-System F ist genau dann frei und einfach, wenn $F \cong S$ (als S-System), $\operatorname{LCon} S = \{\Delta, \nabla\}$ und $S = S^1$ gilt.*

Beweis: F ist einfach und daher auch irreduzibel, weswegen die Erzeugendenmenge von F nur ein Element x enthalten kann. In einem irreduziblen S-System ist jedes erzeugende Element automatisch ein strikt Erzeugendes. Aus Satz 2.2.8 folgt damit $S/\operatorname{Ann} x \cong F$ und wegen $\operatorname{Ann} x \subseteq \operatorname{Ann}_{S^1} x = \Delta$ gilt $S \cong F$. Die Elemente von $\operatorname{LCon} S$ sind nach Lemma 2.2.6 die Elemente von $\operatorname{Con} S$ aufgefaßt als S-System, woraus $\operatorname{LCon} S = \{\Delta, \nabla\}$ folgt. Da x strikt erzeugend ist, gibt es ein $e \in S$ mit $ex = x$. Wegen $\operatorname{Ann}_{S^1} x = \Delta$ gilt $e = 1$.

Umgekehrt ist $F \cong S$ frei über dem laut Voraussetzung existierenden Einselement ($S1 = S$ und $a1 = b1 \Rightarrow a = b$ für alle $a, b \in S^1$) und wegen $\operatorname{LCon} S = \{\Delta, \nabla\}$ auch einfach. □

2.5 Halbeinfache Halbgruppen

Analog zum Ringfall gilt für halbeinfache Halbgruppen

Satz 2.5.1 *Jede halbeinfache Halbgruppe S besitzt folgende Darstellung:*

$$S \cong \prod_M {}^S S/\operatorname{Ann} M,$$

wobei M alle einfachen S-Systeme durchläuft.

Definition 2.5.2 Eine Halbgruppe S heißt **primitiv**, wenn sie ein einfaches, treues S-System besitzt.

Wie bei Ringen gilt daher, daß eine halbeinfache Halbgruppe ein subdirektes Produkt primitiver Halbgruppen ist.

Bemerkung 2.5.3 Ebenso wie bei Ringen folgt aus Satz 2.3.9 und Satz 2.3.5, daß eine Halbgruppe S genau dann primitiv ist, wenn sie eine maximale, modulare Linkskongruenz besitzt, die keine Kongruenzrelation außer Δ enthält.

Es bleibt auch bei Halbgruppen wieder die Frage nach der Struktur primitiver Halbgruppen, speziell wollen wir die Interpolationseigenschaften auf den zugehörigen einfachen, treuen S-Systemen untersuchen.

2.6 Links-(Rechts-)nullhalbgruppen

Um einen kleinen Einblick in die Situation bei Halbgruppen zu bekommen, inwieweit man einen Dichtesatz analog zum Ringfall erwarten kann, untersuchen wir in den folgenden drei Abschnitten zunächst Interpolationseigenschaften einiger spezieller Beispiele (primitiver) Halbgruppen. In den meisten Fällen, in denen Ergebnisse erzielt werden konnten, erweist sich jedoch, daß die Halbgruppe S auf dem zugehörigen einfachen, treuen S-System M nur an einer Stelle interpoliert. Interpolation an einer Stelle $m \neq m_0$ ist jedoch immer gegeben, da jedes Nichtfixelement strikt erzeugend ist, was gleichbedeutend ist mit $Sm = M$, dh. der Interpolationseigenschaft.

Definition 2.6.1 Sei S eine Halbgruppe. Dann nennt man S eine **Linksnullhalbgruppe (Rechtsnullhalbgruppe)**, wenn für alle $a, b \in S$

$$ab = a \text{ (bzw. } ab = b)$$

gilt.

Satz 2.6.2 *Sei S eine Linksnulllhalbgruppe (bzw. Rechtsnullhalbgruppe), dann gibt es kein einfaches S-System mit mehr als zwei Elementen.*

Beweis: Sei Θ eine beliebige Äquivalenzrelation auf S. Wir betrachten den Fall einer Linksnullhalbgruppe, der zweite Fall wird analog behandelt. Sei $(a, b) \in \Theta$ und $(c, d) \in \Theta$. Dann gilt $(ac, bd) = (a, b) \in \Theta$. Jede Äquivalenzrelation auf S ist also auch eine Kongruenzrelation. Ist Θ eine modulare Linkskongruenz (und damit auch Kongruenz) und $[a]_\Theta$ eine ihrer Klassen, dann ist $\{[a]_\Theta, S \setminus [a]_\Theta\}$ die Partition einer Θ enthaltenden Linkskongruenz, die nach Lemma 2.2.7 modular ist. Maximale modulare Linkskongruenzen haben also nicht mehr als zwei Klassen. Aus Satz 2.3.10 folgt die Behauptung. $\square$

2.7 Links-(Rechts-)einfache Halbgruppen

Als nächstes schränken wir die Idealstruktur auf S ein und untersuchen die Aktionen linkseinfacher, rechtseinfacher und einfacher Halbgruppen auf zugehörigen (einfachen, treuen) S-Systemen. Im Falle der linkseinfachen Halbgruppen erweist sich S als Halbgruppe injektiver Abbildungen, und im Falle einfacher Halbgruppen genügt die Existenz eines Linkseinselements um die Injektivität aller Halbgruppenelemente zu folgern.

Definition 2.7.1 Eine Teilmenge $L \subseteq S$ heißt **Linksideal** von S, wenn $SL \subseteq L$ gilt. $R \subseteq S$ heißt **Rechtsideal**, wenn $RS \subseteq R$ gilt. $I \subseteq S$ heißt **Ideal**, wenn es ein Links- und ein Rechtsideal ist.

S heißt **linkseinfach (rechtseinfach, einfach)**, wenn es außer S kein Linksideal (Rechtsideal, Ideal) gibt.

Definition 2.7.2 Sei M ein S-System. Wir bezeichnen für ein $a \in S$ mit $\ker a := \{(m,n) \in M \times M \mid am = an\}$ den Kern der Abbildung $M \to M$, $m \mapsto am$.

Lemma 2.7.3 *S sei eine linkseinfache Halbgruppe und M ein S-System. Dann gilt*

$$\ker a = \ker b, \quad \forall a, b \in S.$$

Beweis: Da S linkseinfach ist, gilt für beliebige Elemente $a, b \in S$ $Sa = Sb = S$. Es gibt also ein $c \in S$ mit $a = cb$. Sei nun $(m,n) \in \ker b$. Dann gilt $am = cbm = cbn = an$, also $\ker b \subseteq \ker a$. Analog gilt $\ker a \subseteq \ker b$ und somit die Gleichheit. □

Bemerkung 2.7.4 Operieren alle Elemente einer Halbgruppe S injektiv auf einem S-System M, dann kann an höchstens einer Stelle interpoliert werden, da zu $m, n \in M$, $m \neq n$, keine gleichen Bilder vorgeschrieben werden können. Speziell im Falle, daß S eine Gruppe ist, sind alle Elemente aus S bijektiv.

Satz 2.7.5 *S sei linkseinfach und M ein S-System. Dann interpoliert S an höchstens einer Stelle. Ist M zusätzlich einfach, dann sind alle $a \in S$ injektiv.*

Beweis: Angenommen S interpoliere an mehr als einer Stelle. Es gibt also $m, n \in M$, $m \neq n$, sodaß für alle $p, q \in M$ ein $a \in S$ existiert mit $am = p$, $an = q$. Wählt man speziell $p = q$, dann gibt es ein $a \in S$ mit $am = an$. Wegen des obigen Lemmas, gilt damit aber $bm = bn$ für alle $b \in S$. Für $p \neq q$ gibt es daher kein $c \in S$ mit $cm = p$, $cn = q$ im Widerspruch zur Interpolationseigenschaft von S auf m, n.

Sei nun M einfach. Gäbe es ein $a \in S$, das nicht injektiv ist, daher $m, n \in M$ mit $am = an$, dann wäre $bm = bn$ für alle $b \in S$ im Widerspruch zu Lemma 2.3.12. □

(Es genügt bei linkseinfachen Halbgruppen vorauszusetzen, daß ein injektives Halbgruppenelement existiert, damit alle Elemente injektiv sind, da alle Kerne gleich sind). Im Falle rechtseinfacher Halbgruppen konnte leider keine Aussage über deren Interpolationseigenschaften gemacht werden. Es gilt jedoch Folgendes:

Lemma 2.7.6 *Sei S rechtseinfach und M ein strikt zyklisches S-System. Dann sind alle $a \in S$ surjektiv.*

Beweis: Analog zum Fall der Linkseinfachheit gilt $aS = bS = S$, $a, b \in S$ beliebig. Sei $n \in aM$, daher $n = am$. Wegen $a = bc$ für ein $c \in S$ gilt $n = b(cm) \in bM$, daher $aM = bM$. M ist strikt zyklisch. Jedes $n \in M$ hat daher eine Darstellung $n = a_n m \Rightarrow n \in a_n M$. Da alle aM gleich sind gilt $n \in aM$ für alle $a \in S$, gleichbedeutend mit $aM = M$. □

Definition 2.7.7 Ein Element e einer Halbgruppe heißt **idempotent**, falls $ee = e$ gilt.

Folgerung 2.7.8 *S sei rechtseinfach und M ein strikt zyklisches, treues S-System. Dann gibt es höchstens ein idempotentes Element in S, das dann gleich 1 ist.*

Beweis: Sei $e \in S$ idempotent. Es gilt $e|_{eM} = \mathrm{id}_{eM}$. Nach obigem Lemma ist e surjektiv, also $e = \mathrm{id}_M$. Da M treu ist, gibt es kein weiteres $f \in S$, mit $em = fm$ für alle $m \in M$, und somit ist e das neutrale Element von S. □

Als letzte Klasse von Halbgruppen betrachten wir einfache Halbgruppen und folgern dann noch eine Aussage über Halbgruppen, die keine nichttrivialen Kongruenzrelationen besitzen.

Satz 2.7.9 *Sei S eine einfache Halbgruppe und M ein S-System. Gibt es ein $a \in S$, das injektiv ist, dann sind alle $a \in S$ injektiv. Speziell sind alle $a \in S$ injektiv, wenn M strikt zyklisch ist, und S ein Linkseinselement besitzt.*

Beweis: Für alle $a \in S$ gilt wegen der Einfachheit von S die Gleichung $S = SaS$. Sei a injektiv und b beliebig. Dann gilt $a = cbd$, $c, d \in S$, woraus die Injektivität von b folgt.

Sei nun $M = Sm$ für ein $m \in M$. Wir wählen ein $e \in S$ mit $em = m$. Sei 1_l Linkseins in S. Dann gilt $1_l m = 1_l em = em = m \Rightarrow 1_l = \mathrm{id}_M$. Es sind also alle $a \in S$ injektiv. □

Definition 2.7.10 Sei S eine Halbgruppe und $A \subseteq S$ ein Ideal. Dann ist

$$\Theta_A := (A \times A) \cup \{(a, a) \in S \times S \mid a \notin A\}$$

eine Kongruenzrelation, die von A erzeugte **Rees-Kongruenz**.

Lemma 2.7.11 *Ist S eine Halbgruppe mit $\operatorname{Con} S = \{\Delta, \nabla\}$, dann ist S einfach. (Einfachheit bei Halbgruppen ist nicht äquivalent mit einfach im Sinne der universellen Algebra, wo mit einfach kongruenzfrei gemeint ist!)*

Beweis: Gäbe es ein Ideal $A \neq S$, dann mit Θ_A auch eine Kongruenzrelation $\neq \Delta, \nabla$. $\Box$

Mit Hilfe dieses Lemmas erhalten wir unmittelbar

Folgerung 2.7.12 *Ist S primitiv,* $\operatorname{Con} S = \{\Delta, \nabla\}$ *und enthält S ein Linkseinselement, dann sind alle Elemente aus S injektive Abbildungen auf einem zugehörigen einfachen, treuen S-System M.*

2.8 Links-(Rechts-)gruppen

Fordert man zusätzlich zur Linkseinfachheit die Rechtskürzbarkeit einer Halbgruppe, dann gelangt man zum Begriff der Linksgruppe. Für primitive Halbgruppen erweisen sich Linksgruppen (und ebenso Rechtsgruppen) als Gruppen.

Definition 2.8.1 Eine Halbgruppe S heißt **linkskürzbar (rechtskürzbar)**, falls für alle $a, b, c \in S$

$$ab = ac \text{ (bzw. } ba = ca) \Rightarrow b = c$$

gilt. S nennt man eine **Rechtsgruppe (Linksgruppe)**, wenn S rechtseinfach und linkskürzbar (bzw. linkseinfach und rechtskürzbar) ist.

Satz 2.8.2 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *S ist eine Rechtsgruppe.*
2. *S ist rechtseinfach und enthält ein idempotentes Element.*
3. *$S = G \times R$, wobei G eine Gruppe und R eine Rechtsnullhalbgruppe ist. R ist die Menge aller idempotenten Elemente von S.*

Beweis: Siehe [Cli1], Theorem 1.27. $\Box$

Folgerung 2.8.3 *Sei M ein strikt zyklisches, treues S-System. Dann ist S genau dann eine Rechtsgruppe, wenn S eine Gruppe ist.*

Beweis: $\Leftarrow$: Sei S eine Gruppe. Dann ist S auch eine Rechtsgruppe.

$\Rightarrow$: Nach der obigen Charakterisierung ist $S = G \times R$, wobei R alle Idempotenten von S enthält. Nach Folgerung 2.7.8 gibt es aber höchstens ein Idempotentes und daher genau eines. S ist also eine Gruppe. $\square$

Satz 2.8.4 *Sei M ein einfaches, treues S-System. Dann ist S genau dann eine Linksgruppe, wenn S eine Gruppe ist.*

Beweis: $\Leftarrow$: Eine Gruppe ist auch eine Linksgruppe.

$\Rightarrow$: Sei S eine Linksgruppe. Dann ist laut Definition S linkseinfach und wegen Lemma 2.7.5 sind alle $a \in S$ injektiv. Sei $e \in S$ ein Idempotentes (ein solches gibt es, da S eine Linksgruppe ist). Wir nehmen an, daß eM eine echte Teilmenge von M ist. Sei $m \in M \setminus eM$. Mit $n := em \in eM$ erhält man $em = eem = en$, $m \neq n$, im Widerspruch zur Injektivität von e. Es gilt also $e|_{eM=M} = \mathrm{id}_M$ und aus der Treue von M folgt wie in Folgerung 2.7.8, daß e das einzige idempotente Element ist. S ist somit eine Gruppe. $\square$

Da jedes einfache S-System auch strikt zyklisch ist, kann man zusammenfassend sagen:

Folgerung 2.8.5 *Sei S eine primitive Halbgruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *S ist eine Linksgruppe.*
2. *S ist eine Rechtsgruppe.*
3. *S ist eine Gruppe.*

Für periodische und E-inversive Halbgruppen können wir diesen Satz noch verbessern:

Definition 2.8.6 Sei S eine Halbgruppe und $a \in S$. $\langle a \rangle := \{a^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ nennt man die **von a erzeugte Unterhalbgruppe** und $|\langle a \rangle|$ die **Ordnung** des Elements a. Eine Halbgruppe heißt **periodisch**, falls jedes Element endliche Ordnung hat.

Bemerkung 2.8.7 Ist eine Halbgruppe S periodisch (speziell $|S| < \infty$), dann enthält $\langle a \rangle$ für jedes $a \in S$ ein Idempotentes (siehe [Cli1]). In diesem Fall gilt, falls S primitiv ist, daß für S die Begriffe linkseinfach, rechtseinfach und Gruppe äquivalent sind. (S ist auch endlich, falls M endlich ist, da dann M^M endlich ist und $S \leq M^M$).

Definition 2.8.8 Eine Halbgruppe S ohne Null heißt **E-inversiv**, falls es zu jedem $a \in S$ ein $b \in S$ gibt, sodaß ab idempotent ist. (Reguläre Halbgruppen ohne Null sind z.B. eine große Klasse E-inversiver Halbgruppen).

Satz 2.8.9 *Für eine E-inversive Halbgruppe S sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *S ist linkskürzbar.*
2. *S ist rechtseinfach.*
3. *S ist eine Rechtsgruppe.*
4. *$ea = a$ für alle Idempotenten $e \in S$ und alle $a \in S$.*

Beweis: Siehe [Mit1]. □

Bemerkung 2.8.10 Wir erhalten für primitive, E-inversive Halbgruppen, daß die Begriffe links-(rechts-)kürzbar, links-(rechts-)einfach, Links-(Rechts-)gruppe und Gruppe äquivalent sind.

2.9 Ein Satz aus der Fastringtheorie

Wie bei Ringen gibt es auch bei Fastringen Dichtesätze vom Jacobson-Typ. (Ein **Fastring** ist ein Ring, mit nicht notwendigerweise kommutativer Addition und nur einem Distributivgesetz). Unter anderem gilt:

Satz 2.9.1 *Sei F ein Fastring und M eine treue F-Gruppe (das Analogon eines Moduls bzw. S-Systems). Hat F die 4-Interpolationseigenschaft (dh. interpoliert F an vier beliebigen Stellen von M), dann hat F für jede natürliche Zahl n die n-Interpolationseigenschaft.*

Beweis: Siehe [Aic1], Corollary 4.19. □

Daß ein Satz dieses Typs bei Halbgruppen nicht möglich ist, zeigt Folgendes:

Beispiel 2.9.2 Sei $M := \mathbf{N}$ und $S_n := \{a \in M^M \mid |a(M)| \leq n\}$, $n \in \mathbf{N}$. Da S_n eine Halbgruppe von Abbildungen ist, ist M treu, und nach Satz 2.3.15 einfach. Weiters sieht man, daß S_n die n-IPE aber nicht die $(n+1)$-IPE hat. Darüberhinaus ist S **regulär** (d.h. es gibt zu jedem $a \in S$ ein Element $b \in S$ mit $aba = a$). Es gibt also reguläre Halbgruppen mit nichttrivialen Interpolationseigenschaften.

2.10 Interpolation und Greensche Relationen

Die Greenschen Relationen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Halbgruppen. Hier soll nun eine Aussage über die Anzahl der $\mathcal{L}$-Klassen bei vorausgesetzter n-IPE gemacht werden.

Definition 2.10.1 Sei S eine Halbgruppe, dann bezeichne $S^1a := Sa \cup \{a\}$ das von a erzeugte **Linkshauptideal** (es ist das kleinste Linksideal, das a enthält). Wir definieren folgende Äquivalenzrelation $\mathcal{L}$:

$$a\mathcal{L}b :\Leftrightarrow S^1a = S^1b.$$

Lemma 2.10.2 *Sei S eine Halbgruppe und M ein S-System. Dann gilt $a\mathcal{L}b \Rightarrow \ker a = \ker b$.*

Beweis: Analog zu 2.7.3. □

Satz 2.10.3 *Sei M ein S-System und interpoliere S auf $m_1, \dots, m_n \in M$. Dann gibt es mindestens $2^n - n$ $\mathcal{L}$-Klassen.*

Beweis: Es gibt für alle $p_1, \dots, p_n \in M$ ein $a \in S$ mit $am_i = p_i$, $i = 1, \dots, n$. Wählt man die $p_1, \dots, p_n$ paarweise verschieden, so bilden alle $b \in S$ mit $b\mathcal{L}a$, wegen des obigen Lemmas, die m_i auf paarweise verschiedene Elemente ab. Wählt man zwei der p_i gleich, und die restlichen verschieden, dann hat man $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten für Indizes $1 \leq i < j \leq n$ mit $p_i = p_j$. Analog hat man $\binom{n}{3}$ Möglichkeiten für Indizes $1 \leq i < j < k \leq n$ mit $p_i = p_j = p_k$. Fährt man so fort, dann erhält insgesamt, daß es mindestens

$$\sum_{k=0, k\neq 1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - n$$

verschiedene Kerne von Elementen aus S geben muß und daher auch $\mathcal{L}$-Klassen. □

2.11 Eigenschaften von Rechtseinselementen

Wir haben schon gesehen, daß im Falle einfacher S-Systeme für alle Nichtfixelemente $m \in M$ $\operatorname{Ann} m$ eine maximale, modulare Linkskongruenz ist. In diesem Abschnitt werden wir die Eigenschaften von Rechtseinselementen modularer Linkskongruenzen näher untersuchen und zeigen, daß bei einfachen S-Systemen alle Rechtseinsen mod $\operatorname{Ann} m$ in einer Kongruenzklasse liegen, eine Eigenschaft, die sich später noch als wichtig erweisen wird (ebenso im Fall primitiver Ω-Halbgruppen). Weiters wird ein Zusammenhang zwischen geforderten Interpolationseigenschaften und der Existenz gewisser Rechtseinsen hergestellt.

Satz 2.11.1 *Sei $\Theta \in \operatorname{LCon} S$ modular. Dann sind $U := \{e \in S \mid e$ ist Rechtseins mod $\Theta\}$ und $[e]_\Theta$, e Rechtseins mod Θ, Unterhalbgruppen von S, wobei $[e]_\Theta$ nur Rechtseinselemente mod Θ enthält.*

Beweis: Sind e, e' Rechtseinselemente mod Θ, dann ist wegen

$$aee'\Theta ae\Theta a, \quad \forall a \in S,$$

auch ee' eine Rechtseins mod Θ.

Seien $a, b \in [e]_\Theta$. Dann gilt auch $ab\Theta e$, da

$$ab\Theta ae\Theta a\Theta e.$$

Weiters erhalten wir

$$ca\Theta ce\Theta c, \quad \forall c \in S.$$

Es ist also auch a eine Rechtseins mod Θ. □

Definition 2.11.2 M sei ein S-System und $m \in M$. Dann heißt ein Element $e \in S$ mit $em = m$ ein **Rechtseinselement von** m bzw. eine **Rechtseins von** m.

Bemerkung 2.11.3 Sei M ein S-System und $m \in M$. Es ist unmittelbar klar, daß jede Rechtseins von m auch eine Rechtseins mod $\operatorname{Ann} m$ ist ($am = aem$). Daß die Umkehrung nicht stimmt zeigt folgendes Beispiel: $S := \{a, b\}$ sei die zweielementige Linksnullhalbgruppe. $M := S$ als S-System über sich selbst. $\operatorname{Ann} a = \Delta$ ist modular mit den Rechtseinsen a, b mod $\operatorname{Ann} a$. Aber nur a ist eine Rechtseins von a.

Satz 2.11.4 *Sei M ein S-System und interpoliere S auf $m_1, \ldots, m_n \in M$. Dann gilt:*

1. *Es gibt mindestens $|M|^{n-1}$ Rechtseinsen von m_i, $i = 1, \ldots, n$.*

2. *Sei $k_1 + k_2 + \ldots + k_j = n$ eine Zerlegung von n in j Summanden, dann gibt es eine gemeinsame Rechtseins von $m_1, \ldots, m_n$, die eine $kgV(k_1, \ldots, k_j)$-te Potenz ist.*

Beweis: 1.: Es gibt für jedes n-Tupel $(p_1, \ldots, p_n) \in M^n$ ein $a \in S$ mit $am_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n$. Setzt man nun für ein fixes $1 \leq j \leq n$ $p_j = m_j$ und läßt die restlichen p_i frei wählbar, dann gibt es zu jedem $(n-1)$-Tupel von Elementen aus M eine Rechtseins von m_j.

2.: Sei $k_1 + k_2 + \ldots + k_j = n$. Wir wählen ein $a \in S$ mit

$$\begin{aligned}
&am_1 = m_2, am_2 = m_3, \ldots, am_{k_1} = m_1, \\
&am_{k_1+1} = m_{k_1+2}, \ldots, am_{k_1+k_2} = m_{k_1}, \\
&\ldots, \\
&am_{k_1+\ldots+k_{j-1}} = m_{k_1+\ldots+k_{j-1}+1}, \ldots, am_{k_1+\ldots+k_j} = m_{k_1+\ldots+k_{j-1}}.
\end{aligned}$$

Dann hat $a^{\mathrm{kgV}(k_1,\ldots,k_j)}$ die gewünschte Eigenschaft. □

Folgendes Lemma hilft uns, die Lage der Rechtseinsen mod Θ, für maximale, modulare Linkskongruenzen zu bestimmen.

Lemma 2.11.5 *Sei S eine Halbgruppe und Θ eine maximale, modulare Linkskongruenz. Liegen nicht alle Rechtseinselemente* mod Θ *in einer Kongruenzklasse, dann hat Θ nur zwei Klassen.*

Beweis: Seien e, f Rechtseinselemente mod Θ. Wir nehmen an $(e, f) \notin \Theta$. Dann betrachten wir folgende Äquivalenzrelation:

$$\tilde{\Theta} := \{(a, b) \in S \times S \mid a\Theta b \vee (a\Theta e \wedge b\Theta f)\}.$$

($\tilde{\Theta}$ ensteht also aus Θ, indem die Θ-Klassen von e und f zusammengelegt werden). Sei $(a, b) \in \tilde{\Theta}$ und $c \in S$ ein beliebiges Element. Gilt $(a, b) \in \Theta$, dann auch $(ca, cb) \in \Theta \subseteq \tilde{\Theta}$, da $\Theta \in \mathrm{LCon}\, S$. Sei nun $(a, e) \in \Theta$ und $(b, f) \in \Theta$. Wir erhalten ebenfalls

$$ca\Theta ce\Theta c\Theta cf\Theta cb,$$

also $\tilde{\Theta} \in \mathrm{LCon}\, S$, woraus aufgrund der Maximalität von Θ $\tilde{\Theta} = \nabla$ folgt. Θ hat somit nur die zwei Klassen $[e]_\Theta$ und $[f]_\Theta$. □

In Bemerkung 2.11.3 haben wir gesehen, daß jede Rechtseins von m auch eine Rechtseins $\mod \mathrm{Ann}\, m$ ist, aber nicht notwendigerweise umgekehrt. Die Situation in einfachen S-Systemen ist jedoch anders, da sich dort alle Rechtseinsen $\mod \mathrm{Ann}\, m$, m strikt erzeugend, als kongruent erweisen.

Folgerung 2.11.6 *Sei M ein einfaches S-System. Dann liegen alle Rechtseinselemente* $\mod \mathrm{Ann}\, m$*, m strikt erzeugend (dh. $m \neq m_0$), in einer* $\mathrm{Ann}\, m$*-Klasse. Die Begriffe Rechtseins von m und Rechtseins* $\mod \mathrm{Ann}\, m$ *stimmen überein.*

Beweis: Sei $m \neq m_0$ beliebig. Nach Satz 2.3.9 ist $\mathrm{Ann}\, m$ eine maximale, modulare Linkskongruenz von S. Da $|M| > 2$ vorausgesetzt ist, hat wegen Satz 2.2.8 $\mathrm{Ann}\, m$ mehr als zwei Klassen. Das obige Lemma liefert damit die gewünschte Aussage. Da für ein strikt Erzeugendes $m \in M$ immer ein $e \in S$ existiert, mit $em = m$, stimmen die Begriffe Rechtseins von m und Rechtseins $\mod \mathrm{Ann}\, m$ überein. □

Bemerkung 2.11.7 Daß die Forderung $|M| > 2$ in Folgerung 2.11.6 wesentlich ist, zeigt das Beispiel aus Bemerkung 2.11.3 ebenfalls (M ist dort einfach, und a, b sind beide strikt erzeugende Elemente).

2.12 Die Struktur von $\mathrm{End}\, M$

Daß bei einem einfachen S-System M die Menge $\mathrm{End}\, M$ eine Gruppe bzw. eine Gruppe mit 0 bildet, haben wir schon gesehen. In diesem Abschnitt soll nun die Struktur dieser Gruppe genauer untersucht werden. Es wird sich zeigen, daß $\mathrm{End}\, M$ entweder trivial oder eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung ist. Die Struktur von $\mathrm{End}\, M$ zu analysieren erschien deshalb als wichtig, da im Ringfall $\mathrm{End}\, M$ eine so große Bedeutung zukommt. Ein weiterer Gesichtspunkt für die Betrachtungen in diesem Abschnitt, ist die Untersuchung der Interpolationseigenschaften kommutativer, primitiver Halbgruppen (die bekannt sind, siehe z.B. [Oeh1], Theorem 11). Beide Ansatzpunkte führen schließlich zum selben Ergebnis.

Bemerkung 2.12.1 Im Ringfall interpoliert der Ring R auf zwei Vektoren $m, n \in M$ genau dann, wenn sie linear unabhängig sind, wobei M als Vektorraum über $\operatorname{End} M$ aufgefaßt wird. Lineare Abhängigkeit bedeutet also, daß es einen Endomorphismus ϕ gibt, mit $\phi m = n$. Das gilt nach Satz 1.5.4 genau dann, wenn $\operatorname{Ann} m \subseteq \operatorname{Ann} n$ erfüllt ist. Ein analoger Begriff der linearen Abhängigkeit kann zumindest für zwei S-Systemelemente auch im Halbgruppenfall definiert werden (für mehr als zwei Elemente läßt sich das Konzept der linearen Unabhängigkeit nicht so einfach übertragen, da keine Addition vorhanden ist). Es zeigt sich, daß zumindest die Existenz eines Endomorphismus, der m auf n abbildet, und die Relation $\operatorname{Ann} m \subseteq \operatorname{Ann} n$ äquivalent sind. Die Äquivalenz zur Interpolation von S auf m, n konnte jedoch nur für den Fall, daß die maximalen, modularen Linkskongruenzen vertauschen, gefolgert werden.

Definition 2.12.2 Seien S eine Menge und Θ, Φ zwei Äquivalenzrelationen auf S. Das Relationenprodukt von Θ und Φ ist definiert als

$$\Theta \circ \Phi := \{(a, c) \in S \times S \mid \exists b \in S, a\Theta b\Phi c\}.$$

Man sagt, Θ und Φ **vertauschen**, falls $\Theta \circ \Phi = \Phi \circ \Theta$ gilt.

Satz 2.12.3 *Sei M ein einfaches S-System. S interpoliert auf den Elementen $m_1, \ldots, m_n \in M$ genau dann, wenn*

$$\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} m_j, \quad j = 2, \ldots, n,$$

und

$$(\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i) \circ \operatorname{Ann} m_j = \operatorname{Ann} m_j \circ (\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i), \quad j = 2, \ldots, n$$

gilt.

Beweis: Der Satz ist ein Spezialfall von Satz 3.2.5. □

Satz 2.12.4 *M sei ein einfaches S-System und $m, n \in M$. Dann gilt*

$$\operatorname{Ann} m \subseteq \operatorname{Ann} n \Leftrightarrow \exists \phi \in \operatorname{End} M \text{ mit } \phi m = n.$$

Beweis: $\Rightarrow$: 1. Fall: Ist $n = m_0$, dann wähle man $\phi = m_0$.

2. Fall: Falls $m = m_0$, dann gilt $\operatorname{Ann} m = \nabla$ und daher auch laut Voraussetzung $\operatorname{Ann} n = \nabla$ also auch $n = m_0$ und $\phi = \mathrm{id}_M$ leistet das Gewünschte.

3. Fall: Seien $m \neq n$ beide keine Fixelemente, also strikt Erzeugende. Wegen Satz 2.3.9 sind beide Annulatoren maximal, woraus $\operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} n$ folgt. Wir definieren ϕ folgendermaßen:

$$\phi : M \to M, l = a_l m \mapsto a_l n,$$

dabei ist $a_l \in S$ ein beliebieges Element mit $a_l m = l$. Sei a_l' ein weiteres Element mit $a_l' m = l$. Dann gilt $(a_l, a_l') \in \operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} n \Rightarrow a_l n = a_l' n$. ϕ ist somit wohldefiniert. Weiters gilt für alle $a \in S$ $\phi(al) = \phi(aa_l m) = aa_l n = a\phi l$ also $\phi \in \operatorname{End} M$. Sei e eine Rechtseins von m, dann ist e wegen $\operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} n$ auch eine Rechtseins mod $\operatorname{Ann} n$ und wegen Folgerung 2.11.6 auch eine Rechtseins von n. Wir erhalten $\phi m = \phi e m = en = n$. $\square$

Bemerkung 2.12.5 Auch bei diesem Satz ist die Voraussetzung $|M| > 2$ wesentlich. Man nehme z.B. das S-System aus Bemerkung 2.11.3. Sei $\phi \in \operatorname{End} M$. Wegen $\phi a = \phi(aa) = a\phi a = a$, gibt es kein ϕ mit $\phi a = b$.

Folgerung 2.12.6 *M sei ein einfaches S-System. Vertauschen in S die maximalen, modularen Linkskongruenzen, dann interpoliert S auf zwei Elementen $m, n \in M$ genau dann, wenn es kein $\phi \in \operatorname{End} M$ gibt, mit $\phi m = n$.*

Beweis: Folgt direkt aus den Sätzen 2.12.3 und 2.12.4. $\square$

Die Frage ist nun, für welche Paare $m, n \in M$ es Endomorphismen gibt, die m auf n abbilden. Zur weiteren Untersuchung benötigen wir folgenden wichtigen Begriff:

Definition 2.12.7 Sei M ein S-System. $\operatorname{End} M$ heißt **transitiv**, falls für alle $m, n \in M$, wobei m kein Fixelement ist, ein $\phi \in \operatorname{End} M$ existiert, mit $\phi m = n$.

Lemma 2.12.8 *Sei M ein einfaches S-System.*

1. *Definiert man die Relation*

$$\Psi := \{(m, n) \in M \times M \mid \operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} n\},$$

dann gilt $\Psi \in \operatorname{Con} M$ und $\Psi = \{(m, n) \mid \exists \phi \in \operatorname{Aut} M, \phi m = n\}$.

2. *Entweder* $\operatorname{End} M$ *ist transitiv oder* $\operatorname{End} M = \{id\}$ *bzw.* $\operatorname{End} M = \{id, m_0\}$*. Ist* $\operatorname{End} m$ *transitiv, dann enthält* M *kein Fixelement und* $\operatorname{End} M = \operatorname{Aut} M$*.*

Beweis: 1.: Ψ ist klarerweise eine Äquivalenzrelation. Sei $(m, n) \in \Psi$, daher $am = bm \Leftrightarrow an = bn$, $a, b \in S$. Es gilt also auch $acm = bcm \Leftrightarrow acn = bcn$ für alle $c \in S$, was $(cm, cn) \in \Psi$ und damit $\Psi \in \operatorname{Con} M$ impliziert.

Aus $\operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} n$ folgt, daß entweder beide Elemente fix oder beide strikt erzeugend sind. Sind beide gleich m_0, dann ist $\phi := \mathrm{id}_M$ ein Automorphismus mit $\phi m = n$. Wenn beide Elemente strikt erzeugend sind, dann gibt es laut Satz 2.12.4 einen Endomorphismus ϕ mit $\phi m = n$, der wegen $n \neq m_0$ und Satz 2.3.7 ein Automorphismus ist. Gibt es umgekehrt ein $\phi \in \operatorname{Aut} M$ mit $\phi m = n$, dann gilt nach Satz 2.12.4, angewandt auf ϕ bzw. ϕ^{-1}, $\operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} n$.

2.: Da M einfach ist, gilt $\Psi = \Delta$ oder $\Psi = \nabla$. Sei $\Psi = \Delta$ und $m \neq n$ zwei beliebige strikt erzeugende Elemente. Dann gibt es kein $\phi \in \operatorname{Aut} M$ mit $\phi m = n$. Da $\operatorname{End} M = \operatorname{Aut} M$ (evtl. $\operatorname{Aut} M \cup \{m_0\}$) gilt, folgt $\operatorname{End} M = \{\mathrm{id}\}$ bzw. $\{\mathrm{id}, m_0\}$.

Im Falle $\Psi = \nabla$ gibt es zu je zwei verschiedenen Elementen m, n ein $\phi \in \operatorname{Aut} M$ mit $\phi m = n$. $\operatorname{End} M$ ist also transitiv. Gäbe es ein Fixelement m_0, dann wären alle $m \in M$, wegen $\operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} m_0 = \nabla$, Fixelemente im Widerspruch dazu, daß es höchstens eines gibt. Da M einfach ist, folgt $\operatorname{End} M = \operatorname{Aut} M$. $\square$

Bemerkung 2.12.9 Ist $\operatorname{End} M$ nicht transitiv, dann gibt es in S nach obigem Satz mindestens $|M|$ verschiedene maximale, modulare Linkskongruenzen.

Folgendes Lemma stellt einen Zusammenhang zwischen der Kommutativität von S und der Transitivität von $\operatorname{End} M$ her.

Lemma 2.12.10 *Sei* M *ein einfaches* S*-System. Gilt*

$$\{(ab, ba) \in S \times S \mid a, b \in S\} \subseteq \operatorname{Ann} M,$$

dann ist $\operatorname{End} M$ *transitiv. (Speziell gilt das für kommutative Halbgruppen. Ist* M *treu, dann kann die Inklusion nur bei Kommutativität von* S *erfüllt sein).*

Beweis: Seien $m, n \in M$ und $m \neq m_0$. Ist $n = m_0$, dann leistet $m_0 \in \operatorname{End} M$ $m \mapsto n$. Sonst gibt es ein $a_n \in S$ mit $n = a_n m$. Wir definieren

$$\phi : M \to M, x \mapsto a_n x.$$

Wegen $\phi(ax) = a_n ax = aa_n x = a\phi x$ ist ϕ ein Endomorphismus mit $\phi m = n$ und $\operatorname{End} M$ daher transitiv. □

Wir werden jetzt sehen, daß im Falle der Transitivität die Strukturen von $\operatorname{End} M$, S und M eng miteinander verknüpft sind. Dazu benötigen wir folgende

Definition 2.12.11 Seien S, T zwei Halbgruppen. Eine bijektive Abbildung $\phi : S \to T$ mit $\phi(ab) = (\phi b)(\phi a)$ heißt **Antiisomorphismus** von S nach T. S, T heißen **antiisomorph** (i.Z. $S \cong_d T$).

Lemma 2.12.12 *M sei ein treues, einfaches S-System und $\operatorname{End} M$ transitiv. Dann gilt*

1. $\operatorname{Ann} m = \Delta$, $\forall m \in M$.
2. *S ist eine Gruppe mit $S \cong_d \operatorname{End} M = \operatorname{Aut} M$.*
3. *S und M sind als S-Systeme isomorph.*

Beweis: 1.: Aus der Transitivität von $\operatorname{End} M$ folgt, daß die Kongruenzrelation Ψ aus Lemma 2.12.8 gleich ∇ ist. Es gilt also $\operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} n$ für alle $m, n \in M$, und aus der Treue von M folgt

$$\Delta = \operatorname{Ann} M = \bigcap_{n \in M} \operatorname{Ann} n = \operatorname{Ann} m, \quad \forall m \in M.$$

2.: Nach Lemma 2.12.8 ist $\operatorname{End} M = \operatorname{Aut} M$, also eine Gruppe. Wir wählen nun ein fixes $m \in M$. Wegen der Transitivität von $\operatorname{End} M$ gibt es für alle $a \in S$ ein $\phi_a \in \operatorname{End} M$ mit $\phi_a m = am$. Damit definieren wir

$$\Phi : S \to \operatorname{End} M, a \mapsto \phi_a.$$

Sei ϕ'_a ein weiterer Endomorphismus mit $a \mapsto am$ und $n \in M$ beliebig. Mit $n = a_n m$ erhält man

$$\phi_a n = \phi_a(a_n m) = a_n \phi_a m = a_n am = a_n \phi'_a m = \phi'_a n.$$

Φ ist daher wohldefiniert. Ist $a \neq b$, dann gilt wegen 1. auch $am \neq bm$ also ist Φ injektiv. Sei ϕ ein beliebiger Endomorphismus von M, dann gibt es ein $a_\phi \in S$ mit $\phi m = a_\phi m$ und $\Phi a_\phi = \phi$, was die Surjektivität von Φ zeigt. Zuletzt erweist sich Φ wegen

$$\Phi(ab)m = abm = a\phi_b m = \phi_b(am) = \phi_b(\phi_a m) = ((\Phi b) \circ (\Phi a))m$$

als Antiisomorphismus.

3.: Aus Satz 2.2.8 und 1. folgt $S \cong S/\operatorname{Ann} m \cong M$ für ein beliebiges $m \in M$. $\square$

Bemerkung 2.12.13 Sei G eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe. Gilt $a \in bU$, dann auch $ca \in cbU$ für alle $c \in G$. U liefert also eine Linkskongruenz auf G. Ist umgekehrt $\Theta \in \operatorname{LCon} G$ gegeben, dann ist $[e]_\Theta$ wegen $a\Theta e$, $b\Theta e \Rightarrow ab\Theta e$ eine Untergruppe von G.

Nun können wir das Hauptergebnis dieses Abschnitts, die vollständige Bestimmung der Struktur von $\operatorname{End} M$, formulieren:

Satz 2.12.14 *M sei ein einfaches, treues S-System. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. $\operatorname{End} M$ *ist transitiv.*
2. *S ist isomorph zu einer zyklischen Gruppe von Primzahlordnung.*
3. *S ist kommutativ.*

Beweis: 1.$\Rightarrow$2.: Wir fassen S als S-System über sich selbst auf. Dann ist wegen Lemma 2.12.12 S eine Gruppe und $S \cong M$. M ist einfach, woraus mit Hilfe von Lemma 2.2.6 folgt, daß S keine nichttrivialen Linkskongruenzrelationen besitzt, was nach Bemerkung 2.12.13 bedeutet, daß S eine Gruppe ohne Untergruppen ist. Speziell gibt es kein $a \in S$, sodaß $\langle a \rangle$ eine echte Untergruppe von S ist. S ist daher eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung.

2.$\Rightarrow$3.: Zyklisch $\Rightarrow$ abelsch.

3.$\Rightarrow$1.: Folgt aus Lemma 2.12.10. $\square$

Ist S nicht kommutativ, dann können wir zumindest die Struktur des Zentrums bestimmen.

Definition 2.12.15 Sei S eine Halbgruppe. Dann nennt man die Menge

$$Z(S) := \{a \in S \mid ab = ba, \forall b \in S\}$$

das **Zentrum** von S.

Folgerung 2.12.16 *Sei M ein einfaches, treues S-System. Dann ist nur einer der folgenden zwei Fälle möglich:*

1. $Z(S) = S \Rightarrow S \cong \mathbf{Z}_p$, *$p$ prim.*
2. $Z(S) \subseteq \{0, 1\}$. *(Das soll nicht heißen, daß S notwendigerweise ein Null- und ein Einselement enthält, sondern nur, daß diese, falls es sie gibt, die einzigen Zentrumselemente sind).*

Für primitive Halbgruppen ist also Kommutativität äquivalent zur Existenz eines nichttrivialen Zentrumselements.

Beweis: Nach Lemma 2.12.8 gibt es für $\operatorname{End} M$ nur zwei Möglichkeiten. Fall 1: $\operatorname{End} M$ ist transitiv. Dann ist $S \cong \mathbf{Z}_p$.

Fall 2: $\operatorname{End} M \subseteq \{id, m_0\}$. Sei $a \in Z(S)$. Dann ist $a : M \to M$, $m \mapsto am$, wegen $abm = bam$ ein Endomorphismus. Wir betrachten den Fall $a = id$. Daraus folgt $(ab, b) \in \operatorname{Ann} m$ und $(ba, b) \in \operatorname{Ann} m$ für alle $m \in M$ also $(ab, b) \in \bigcap_{m \in M} \operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} M$ und $(ba, b) \in \operatorname{Ann} M$ und mit $\operatorname{Ann} M = \Delta$ gilt $ab = ba = b$ für alle $b \in S$. a ist also das Einselement von S. Sei nun $am = m_0$, $\forall m \in M$. Es folgt analog $(ab, a), (ba, a) \in \operatorname{Ann} M = \Delta$ für alle $b \in S$. a ist in diesem Fall gleich 0. $\square$

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß bei einem einfachen, treuen S-System $\operatorname{End} M$ entweder trivial oder $\cong \mathbf{Z}_p$, p prim, ist. Im letzteren Fall ist S ebenso isomorph zu $\mathbf{Z}_p$, was genau dann der Fall ist, wenn S abelsch ist. Man kann sich bei weiteren Untersuchungen also auf nichtabelsche primitive Halbgruppen beschränken, wobei sogar verlangt werden kann, daß außer 0 und 1 keine weiteren Zentrumselemente existieren. Außerdem gibt es auf S dann mindestens $|M|$ verschiedene maximale, modulare Linkskongruenzen. Weiters kann $\operatorname{End} M \subseteq \{id, m_0\}$ vorausgesetzt werden. Es werden nun noch einige einfache Folgerungen gezeigt.

Definition 2.12.17 Eine abelsche Halbgruppe S heißt **Halbverband**, wenn alle Elemente aus S idempotent sind.

S heißt **vollständig regulär**, wenn es eine einstellige Operation $^{-1}: S \to S$ gibt, mit

$$(a^{-1})^{-1} = a, \quad aa^{-1}a = a, \quad aa^{-1} = a^{-1}a.$$

Eine vollständig reguläre Halbgruppe heißt **Clifford-Halbgruppe**, wenn für alle $a, b \in S$

$$(aa^{-1})(bb^{-1}) = (bb^{-1})(aa^{-1})$$

gilt.

Eine Halbgruppe S heißt **Halbverband von Gruppen**, wenn es eine Kongruenzrelation $\Theta \in \operatorname{Con} S$ gibt, sodaß S/Θ kommutativ ist, und die Θ-Klassen Untergruppen von S sind.

Folgerung 2.12.18 *Es gibt keine primitiven Halbverbände.*

Beweis: Halbverbände sind kommutativ, aber keine Gruppen. $\Box$

Bemerkung 2.12.19 (Siehe [Cli1]). In einer Halbgruppe S gibt es zu jedem Idempotenten $e \in S$ eine maximale Untergruppe $H_e \subseteq S$, die e als Einselement enthält (diese Zuordnung Untergruppe $\leftrightarrow$ Idempotentes ist bijektiv). Ist S eine Vereinigung von Gruppen (diese ist dann notwendigerweise disjunkt), dann ist S genau die Vereinigung der H_e, e idempotent. Speziell ist natürlich ein Halbverband von Gruppen eine Vereinigung von Gruppen.

Satz 2.12.20 *Sei S eine Halbgruppe, dan sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *S ist eine Clifford-Halbgruppe.*
2. *S ist ein Halbverband von Gruppen.*
3. *S ist regulär (für die Definition von regulär siehe Bsp. 2.9.2), und die Idempotenten von S sind Zentrumselemente.*

Beweis: Siehe [How1], Theorem 4.2.1. $\Box$

Folgerung 2.12.21 *Eine primitive Clifford-Halbgruppe ist eine Gruppe oder eine Gruppe mit 0.*

Beweis: Da nach obigem Satz die Idempotenten Zentrumselemente sind, ist nach nach Folgerung 2.12.16 S entweder isomorph zu $\mathbf{Z}_p$, oder es gibt höchstens die Idempotenten 0 und 1. Weiters ist S ein Halbverband von Gruppen. Nach Bemerkung 2.12.19 ist S Vereinigung von höchstens zwei Gruppen, wobei 0 eine einelementige Gruppe liefert. S ist daher eine Gruppe (mit 0). $\Box$

2.13 $\operatorname{End} M$ bei irreduziblen S-Systemen

Bei der Definition des Radikals bei Halbgruppen wurden bisher einfache S-Systeme betrachtet. Man kann aber genauso ein Radikal als Schnitt der Annulatoren aller irreduziblen S-Systeme definieren. Analog erhält man dann, daß eine halbeinfache Halbgruppe (dh. mit Radikal $= \Delta$) ein subdirektes Produkt primitiver Halbgruppen ist, daher im jetzigen Fall von Halbgruppen, die ein treues, irreduzibles S-System besitzen. Auch in diesem Fall konnte der Fall der Transitivität von $\operatorname{End} M$ ähnlich wie in Satz 2.12.14 charakterisiert werden.

Bemerkung 2.13.1 Ist M ein irreduzibles S-System, dann kann über ein Element ϕ aus $\operatorname{End} M$ im allgemeinen nur mehr geschlossen werden, daß ϕ surjektiv oder konstant ist (wegen $\phi M \leq M$) jedoch nicht mehr auf die Injektivität von ϕ. Diese folgt jedoch, falls M endlich ist. Dann gilt wie im Falle von M einfach: $\operatorname{End} M = \operatorname{Aut} M$ oder $\operatorname{Aut} M \cup \{m_0\}$.

Satz 2.13.2 *Sei M ein irreduzibles, treues S-System. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $\operatorname{End} M$ *ist transitiv.*
2. *S ist eine Gruppe oder Gruppe mit 0 und $M \cong S$ als S-System.*
3. *$S = S^1$ und $M \cong S$ als S-System.*

Beweis: 1.⇒2.: Schritt 1: Sei $m \in M$, $m \neq m_0$ und $\phi \in \operatorname{End} M$. Wegen $m \neq m_0$ ist m strikt erzeugend. Ist $\phi m = m_0$, dann folgt $\phi = m_0$ wegen

$$\phi M = \phi(Sm) = S\phi m = Sm_0 = m_0.$$

Sei nun $\phi m \neq m_0$. Da $\operatorname{End} M$ transitiv ist, gibt es ein $\psi \in \operatorname{End} M$ mit $\psi(\phi m) = m$. Ein Endomorphismus auf M ist schon durch sein Bild auf einem strikt Erzeugenden festgelegt, woraus $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ und damit die Injektivität von ϕ folgt. Die Surjektivität gilt nach der obigen Bemerkung. Wir erhalten also $\operatorname{End} M = \operatorname{Aut} M$ bzw. $\operatorname{Aut} M \cup \{m_0\}$, daher eine Gruppe bzw. Gruppe mit 0.

Schritt 2: Seien $m, n \in M$ keine Fixelemente und $(a, b) \in \operatorname{Ann} m$. Wegen der Transitivität von $\operatorname{End} M$ gibt es ein $\phi \in \operatorname{End} M$ mit $\phi m = n$, und wir erhalten $an = \phi am = \phi bm = bn$, mit anderen Worten $\operatorname{Ann} m \subseteq \operatorname{Ann} n$ und analog $\operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} n$ für alle $m, n \in m$, $m \neq m_0 \neq n$. Da M treu ist, folgt $\operatorname{Ann} n = \bigcap_{m \in M} \operatorname{Ann} m = \Delta$ für alle $n \in M$.

Schritt 3: Aus $\operatorname{Ann} m = \Delta$ für alle strikt Erzeugenden $m \in M$ folgt $S \cong M$ als S-System.

Schritt 4: Völlig analog zu Lemma 2.12.12 zeigt man $S \cong_d \operatorname{End} M$. S ist also eine Gruppe oder eine Gruppe mit 0.

2.⇒1.: Sei S eine Gruppe (mit 0) und $S \cong M$ als S-System. Wir bezeichnen den Isomorphismus zwischen S und M mit ψ, und sei $p := \psi 1$. Ist $\phi \in \operatorname{End} M$, dann ist wegen $\phi m = \phi(a_m p) = a_m \phi p$, $m \in M$, die Abbildung ϕ bereits durch das Bild des strikt erzeugenden Elements p bestimmt. Wir definieren folgende Abbildung

$$\Phi : \operatorname{End} M \to M, \phi \mapsto \phi p.$$

Sei $m \in M$ gegeben und $m = a_m p$. Dann ist die Abbildung $\phi_{a_m} : S \to S$ (S aufgefaßt als S-System), $a \mapsto a a_m$ ein Element von $\operatorname{End} S$ (da $\phi_{a_m}(ca) = caa_m = c\phi_{a_m} a$) mit $\phi_{a_m} 1 = a_m$. Sei $\phi_m := \psi \circ \phi_{a_m} \circ \psi^{-1}$. Dann gilt $\phi_m p = \psi a_m = m$. Damit ist die Surjektivität von Φ gezeigt.

Seien $m, n \in M$ gegeben, $m \neq m_0$, $m = a_m p$. Da Φ surjektiv ist, gibt es ein $\phi \in \operatorname{End} M$ mit $\phi p = a_m^{-1} n$ woraus $\phi m = n$ folgt, also die Transitivität von $\operatorname{End} M$.

2.⇒3.: Klar.

3.⇒2.: Da S als S-System irreduzibel ist, gilt $Sa = S$ für $a \neq 0$ (falls es eine 0 in S gibt). Es gibt daher ein $b \in S$ mit $ba = 1$, also zu jedem Nichtnullelement ein Linksinverses. Sei $d \in S$ das Linksinverse zu ab. Man erhält $1 = d(ab) = da(ba)b = ab$. b ist also auch ein Rechtsinverses und S somit eine Gruppe (mit 0). □

Folgerung 2.13.3 *Sei M ein irreduzibles, treues S-System. Ist S kommutativ, dann ist* $\operatorname{End} M$ *transitiv und S nach obigem Satz eine Gruppe bzw. Gruppe mit 0.*

Beweis: Sei $a \in S$ beliebig. Dann ist $a : M \to M$, $m \mapsto am$, wegen $abm = bam$, $m \in M$ beliebig, ein Element von $\operatorname{End} M$. Da M treu ist, kann S in $\operatorname{End} M$ in natürlicher Weise eingebettet werden (verschiedene Elemente aus S repräsentieren wegen $\operatorname{Ann} M = \Delta$ verschiedene Endomorphismen).

Sei nun $\phi \in \operatorname{End} M$, $m \in M$ ein strikt Erzeugendes, $n := \phi m$ und $n = a_n m$, $a_n \in S$. Damit erhält man

$$a_n p = a_n a_p m = a_p a_n m = a_p \phi m = \phi p,$$

also $\phi = a_n$. Die Einbettung $S \to \operatorname{End} M$ ist daher surjektiv und somit ein Isomorphismus.

Seien $m, n \in M$, $m \neq m_0$ und $n = a_n m$. Da $a_n \in \operatorname{End} M$ gilt, ist $\operatorname{End} M$ transitiv. $\square$

Bemerkung 2.13.4 Wie im vorigen Abschnitt folgt, daß es keine Halbverbände S mit zugehörigem irreduziblen, treuen S-System gibt.

2.14 Dichte in $\operatorname{End}_{\operatorname{End} M} M$

Im Ringfall ist ein einfacher, treuer Modul M, aufgefaßt als Modul über $\operatorname{End}_R M$, ein Vektorraum und die Elemente von $\operatorname{End}_{\operatorname{End} M} M$ sind genau die linearen Abbildungen. Nach dem Jacobsonschen Dichtesatz ist R dicht in $\operatorname{End}_{\operatorname{End} M} M$. In Abschnitt 2.12 haben wir gesehen, daß für $\operatorname{End} M$ nur die Fälle $\operatorname{End} M \cong \mathbf{Z}_p$ und $\operatorname{End} M \subseteq \{\mathrm{id}, m_0\}$ möglich sind. Im ersten Fall gilt $S = \operatorname{End} M$ und daher $S = \operatorname{End}_{\operatorname{End} M} M$ und damit ist S natürlich auch dicht in $\operatorname{End}_{\operatorname{End} M} M$. Ist $\operatorname{End} M \subseteq \{\mathrm{id}, m_0\}$, dann ist $\operatorname{End}_{\operatorname{End} M} M = \{f \in M^M \mid f m_0 = m_0\}$ ($=M^M$, falls M kein Fixelement enthält). S ist in diesem Fall also genau dann dicht in $\operatorname{End}_{\operatorname{End} M} M$, falls S die n-IPE für alle $n \in \mathbf{N}$ hat. In beiden Fällen gilt $\operatorname{End}_{\operatorname{End}_{\operatorname{End} M}} M = \operatorname{End} M$.

2.15 Eine Charakterisierung der Interpolationseigenschaft

Bis jetzt stand uns für die Charakterisierung der Interpolationseigenschaft von S auf Elementen $m_1, \ldots, m_n$ eines einfachen S-Systems nur Satz 2.12.3 zur Verfügung. Im Folgenden soll eine weitere Charakterisierung gezeigt werden.

Lemma 2.15.1 *Sei M ein einfaches S-System und $m_1, \ldots, m_n \in M$. Dann ist $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i$ genau dann modular, wenn es eine gemeinsame Rechtseins von $m_1, \ldots, m_n$ gibt.*

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i$ modular und $e \in S$ eine Rechtseins mod $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i$. Dann ist wegen $(a, ae) \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i \subseteq \operatorname{Ann} m_j$ für alle $a \in S$ e auch eine Rechtseins mod $\operatorname{Ann} m_j$, $j = 1, \ldots, n$. Nach Folgerung 2.11.6 folgt daraus aber $em_j = m_j$, $j = 1, \ldots, n$.

$\Leftarrow$: Gilt $em_i = m_i$, $i = 1, \ldots, n$, dann auch $(a, ae) \in \operatorname{Ann} m_i$, $i = 1, \ldots, n$. e ist daher eine Rechtseins mod $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i$. $\square$

Satz 2.15.2 *Sei M ein einfaches S-System und $m_1, \ldots, m_n \in M \setminus \{m_0\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *S interpoliert auf $m_1, \ldots, m_n$.*

2. *Es gibt eine gemeinsame Rechtseins e von $m_1, \ldots, m_n$ und*
$$S / \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i \cong \prod_{i=1}^n S/\operatorname{Ann} m_i$$
mit
$$[e]_{\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i} \mapsto ([e]_{\operatorname{Ann} m_1}, \ldots, [e]_{\operatorname{Ann} m_n}).$$

Beweis: Wir bezeichnen $(m_1, \ldots, m_n) \in M^n$ mit $\vec{m}$. S interpoliert auf $m_1, \ldots, m_n$ genau dann, wenn $S\vec{m} = M^n$ gilt. Das ist nach Satz 2.2.8 äquivalent dazu, daß $\operatorname{Ann} \vec{m}$ modular ist und $M^n \cong S/\operatorname{Ann} \vec{m}$ gilt mit $\vec{m} \mapsto [e]_{\operatorname{Ann} \vec{m}}$, wobei e eine Rechtseins mod $\operatorname{Ann} \vec{m}$ bezeichnet. Es gilt weiters
$$\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i = \{(a, b) \in S \times S \mid am_i = bm_i,\ i = 1, \ldots, n\} = \operatorname{Ann} \vec{m}.$$
Nach obigem Lemma gilt $em_i = m_i$, $i = 1, \ldots, n$. Da jedes m_i strikt erzeugend ist, gilt $M \cong S/\operatorname{Ann} m_i$ mit $m_i \mapsto [e]_{\operatorname{Ann} m_i}$, $i = 1, \ldots, n$, und daher $M^n \cong \prod_{i=1}^n S/\operatorname{Ann} m_i$ mit $\vec{m} \mapsto ([e]_{\operatorname{Ann} m_1}, \ldots, [e]_{\operatorname{Ann} m_n})$. $\square$

Bemerkung 2.15.3 Wegen $\operatorname{Ann} \vec{m} = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i$ gilt
$$\operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann} M^n,$$
da $\operatorname{Ann} M^n = \bigcap_{\vec{m} \in M^n} \operatorname{Ann} \vec{m} = \bigcap_{\vec{m} \in M^n} \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i = \bigcap_{m \in M} \operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} M$. Insbesondere ist M genau dann treu, wenn M^n treu ist.

Bemerkung 2.15.4 Sei M ein endliches S-System. Interpoliert S auf $m_1, \ldots, m_n$, dann gilt notwendigerweise $|S/\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i| = |M|^n$. Sei zum Beispiel $M = \{1, 2, 3\}$ und $S = S_3$ (die symmetrische Gruppe der Ordnung 3). Dann gilt $\operatorname{Ann} 1 \cap \operatorname{Ann} 2 = \Delta$ und daher $|S/\operatorname{Ann} 1 \cap \operatorname{Ann} 2| = 6 \neq 3^2$. S interpoliert also nicht auf 1,2, was in diesem Fall aber offensichtlich ist.

2.16 Einige Bemerkungen zu $\mathrm{Hom}\,(M^n, M)$

Im nächsten Abschnitt wird $\mathrm{Hom}\,(M^n, M)$ eine wichtige Rolle spielen. Wir erwähnen hier einige einfache Eigenschaften.

Bemerkung 2.16.1 Sei M einfach und treu und $\phi : M^n \to M$ ein Homomorphismus. Dann ist $\phi|_\Delta : M \to M$, $m \mapsto \phi(m, \ldots, m)$ ein Element von $\mathrm{End}\, M$ und daher für nicht kommutatives S gleich id oder m_0.

Bemerkung 2.16.2 Sei M ein S-System. Interpoliert S auf $m_1, \ldots, m_n \in M$, dann ist jedes Element $\phi \in \mathrm{Hom}\,(M^n, M)$ bereits durch $q := \phi(m_1, \ldots, m_n)$ festgelegt, da für $(p_1, \ldots, p_n) \in M^n$ ein $a \in S$ existiert, sodaß

$$\phi(p_1, \ldots, p_n) = \phi(a(m_1, \ldots, m_n)) = aq$$

gilt. Daraus folgt auch sofort, daß S nicht auf $m_1, \ldots, m_n, q$ interpoliert, da für alle $a \in S$ mit am_i, $i = 1, \ldots, n$, automatisch auch aq mitbestimmt ist. Außerdem gilt

$$\ker \phi = \{(a(m_1, \ldots, m_n), b(m_1, \ldots, m_n)) \in M^n \times M^n \mid (a, b) \in \mathrm{Ann}\, q\}.$$

Ist $e \in S$ eine Rechtseins von q, dann gilt $\phi(e(m_1, \ldots, m_n)) = q$.

Beispiel 2.16.3 Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $S = S_3$. Dann ist $\phi : M^2 \to M$,

$$(1,2), (2,1), (3,3) \mapsto 3, \;\; (2,3), (3,2), (1,1) \mapsto 1, \;\; (1,3), (3,1), (2,2) \mapsto 2$$

ein Homomorphismus. (Ein Element aus $\mathrm{Hom}\,(M^2, M)$ muß also nicht notwendigerweise eine Projektion sein). Wegen $(1, 2) \mapsto 3$ interpoliert S nicht auf 1,2,3, was, wie in Bemerkung 2.15.4 schon bemerkt, trivial ist.

2.17 Interpolation in linkskongruenzvertauschbaren Halbgruppen

In diesem Abschnitt soll eine Charakterisierung der Interpolationseigenschaft von S auf Elementen $m_1, \ldots, m_n$ gegeben werden, im Falle, daß in S gewisse modulare Linkskongruenzen vertauschen (nämlich genau $\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i$ und $\operatorname{Ann} m_j$ aus Satz 2.12.3). Diese Charakterisierung läßt sich, wie wir später sehen werden, leicht auf Ω-Halbgruppen verallgemeinern, und dort dann auch erfolgreicher anwenden als im Halbgruppenfall. Es stellt sich bei Halbgruppen nämlich das Problem, jene Halbgruppen zu charakterisieren, in denen diese Linkskongruenzen vertauschen.

Satz 2.17.1 *Sei M ein einfaches S-System. S interpoliere auf $m_1, \ldots, m_n \in M$ und sei $m_{n+1} \in M$. Dann sind äquivalent:*

1. $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ann} m_i \subseteq \operatorname{Ann} m_{n+1}$.
2. $\exists \phi \in \operatorname{Hom}(M^n, M)$ *mit* $\phi(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}$.

Beweis: 1.⇒2.: Wir gehen analog vor zum Ringfall (siehe Beweis von Satz 1.5.4). Für beliebige Elemente $p_1, \ldots, p_n \in M$ gibt es ein $a \in S$ mit $am_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n$. Damit definiert man

$$\phi : M^n \to M, \phi(p_1, \ldots, p_n) = am_{n+1}.$$

Im weiteren setzen wir $\vec{m} := (m_1, \ldots, m_n)$ bzw. $\vec{p} := (p_1, \ldots, p_n)$. Gilt $a\vec{m} = b\vec{m}$, dann wegen 1. auch $am_{n+1} = bm_{n+1}$. Außerdem gilt

$$\phi(c\vec{p}) = \phi(ca\vec{m}) = cam_{n+1} = c\phi\vec{p},$$

daher $\phi \in \operatorname{Hom}(M^n, M)$. Ist $e \in S$ ein Element mit $e\vec{m} = \vec{m}$, dann ist e eine Rechtseins mod $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ann} m_i$ und nach 1. auch mod $\operatorname{Ann} m_{n+1}$, und aus Folgerung 2.11.6 folgt $em_{n+1} = m_{n+1}$, also $\phi\vec{m} = \phi(e\vec{m}) = m_{n+1}$.

2.⇒1.: Sei $(a, b) \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ann} m_i$. Wir erhalten aus $\phi(a\vec{m}) = \phi(b\vec{m}) = am_{n+1} = bm_{n+1}$ auch $(a, b) \in \operatorname{Ann} m_{n+1}$. □

Folgerung 2.17.2 *Hat S die n-IPE auf einem S-System M, dann enthält $Hom(M^i, M)$, $i = 1, \ldots, n-1$, nur Projektionen (und evtl. die konstante Abbildung m_0).*

Beweis: Sei $\phi \in \operatorname{Hom}(M^i, M)$, $1 \leq i \leq n-1$, ein nichtkonstanter Homomorphismus und $m_1, \ldots, m_i \in M$ mit $\phi(m_1, \ldots, m_i) \notin \{m_1, \ldots, m_i\}$, daher keine Projektion. Man kann dabei $m_1 \ldots, m_i$ als paarweise verschieden voraussetzen. Wäre z.B. $m_{i-1} = m_i$, dann ist ϕ' :

$M^{i-1} \to M$, $(p_1, \ldots, p_{i-1}) \mapsto \phi(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i-1})$, ein Homomorphismus mit $\phi(m_1, \ldots, m_{i-1}) \notin \{m_1, \ldots, m_{i-1}\}$. Gleiche m_j können also zusammengefaßt werden. Wegen $\phi(m_1, \ldots, m_i) \notin \{m_1, \ldots, m_i\}$ interpoliert aber S nicht auf $m_1, \ldots, m_i, \phi(m_1, \ldots, m_i)$ (siehe Bemerkung 2.16.2) im Widerspruch zur n-IPE. □

Definition 2.17.3 Eine Halbgruppe S heißt **(links-)kongruenzvertauschbar**, wenn für $\Theta, \Psi \in \operatorname{Con} S$ bzw. $(\operatorname{LCon} S)$ $\Theta \circ \Psi = \Psi \circ \Theta$ gilt.

Bemerkung 2.17.4 Vertauschen in einer Halbgruppe S mit zugehörigem einfachen S-System M für $m_1, \ldots, m_n \in M$ alle Linkskongruenzrelationen $\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i$ mit $\operatorname{Ann} m_j$, $j = 2, \ldots, n$, dann läßt sich die Interpolation von S auf $m_1, \ldots, m_n$ nach Satz 2.12.3 mit $\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} m_j$, $j = 2, \ldots, n$, charakterisieren. Speziell gilt das, wenn in S alle modularen Linkskongruenzen (siehe Lemma 3.4.4) bzw. alle Linkskongruenzen vertauschen. Man erhält dann nach obigem Satz, daß S auf einer Menge $m_1, \ldots, m_n$ genau dann nicht interpoliert, wenn es einen Homomorphismus $\phi : M^i \to M$ gibt, der eine i-elementige Teilmenge von $\{m_1, \ldots, m_n\}$ (o.B.d.A $= \{m_1, \ldots, m_i\}$) auf m_{i+1} abbildet (vergleiche Satz 1.5.4). Da diese Aussagen auch im Fall von Ω-Halbgruppen gelten, wird auf das nächste Kapitel für eine genauere Ausführung verwiesen.

2.18 (Links-)kongruenzvertauschbare Halbgruppen

Um die Aussagen aus dem vorigen Abschnitt anwenden zu können, ist es notwendig, jene primitiven Halbgruppen zu kennen, in denen Annulatoren und deren Schnitte bezüglich des Relationenprodukts vertauschen. Speziell gilt das für Halbgruppen, in denen alle Linkskongruenzen vertauschen. Die Lage der Linkshauptideale (und damit auch der Linksideale) zueinander in linkskongruenzvertauschbaren Halbgruppen wird in diesem Abschnitt untersucht. Für kongruenzvertauschbare Halbgruppen konnte ebenso die Lage der Ideale zueinander bestimmt werden.

Lemma 2.18.1 *S sei linkskongruenzvertauschbar. Dann gilt für zwei Linksideale A, B entweder*

$$A \subseteq B \text{ oder } B \subseteq A \text{ oder } A \cap B = \emptyset.$$

(Die analoge Aussage gilt auch für kongruenzvertauschbares S und zwei Ideale A, B).

Beweis: (Läßt man das Wort „links" im Folgenden weg, dann gilt der Beweis auch für kongruenzvertauschbare Halbgruppen). Seien $\Theta_A, \Theta_B \in \mathrm{LCon}\, S$ die zugehörigen Rees-Linkskongruenzen (Rees-Linkskongruenzen sind analog definiert wie Rees-Kongruenzen). Gelte weder $A \subseteq B$ noch $B \subseteq A$. Angenommen $A \cap B \neq \emptyset$. Es gibt also Elemente $a \in A \setminus B$, $b \in B \setminus A$ und $c \in A \cap B$. Also

$$a \Theta_A c \Theta_B b.$$

Da S linkskongruenzvertauschbar ist, gibt es ein Element $d \in S$, mit

$$a \Theta_B d \Theta_A b.$$

Aus $(a, d) \in \Theta_B$ folgt aber $a = d$, da $a \notin B$. Analog aber folgt auch $d = b$ und somit $a = b$ im Widerspruch zur Wahl von a und b. A und B sind also disjunkt. $\Box$

Folgerung 2.18.2 *In kongruenzvertauschbaren Halbgruppen bilden die Ideale eine Kette.*

Beweis: Sind A, B Ideale von S, dann auch AB. Wegen $AB \subseteq A \cap B$ muß nach obigem Lemma entweder $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ gelten. $\Box$

Im Fall der Linkskongruenzvertauschbarkeit, ist mit A, B zwar AB auch ein Linksideal, aber $AB \subseteq A \cap B$ gilt nicht notwendigerweise. Zur Vereinfachung der Notation bezeichne im Rest des Abschnittes $(a) := S^1 a$ das von $a \in S$ erzeugte Linkshauptideal. Wir schreiben $(a) \subset (b)$, wenn (a) echt in (b) enthalten ist. Gilt für zwei Linksideale A, B entweder $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$, dann sagen wir A, B sind **vergleichbar**. Folgende Aussagen folgen direkt aus Lemma 2.18.1.

Folgerung 2.18.3 *Gibt es in einer linkskongruenzvertauschbaren Halbgruppe S keine disjunkten Linkshauptideale, dann bilden die Linksideale von S eine Kette. Gibt es in S disjunkte Linkshauptideale und keine Linkshauptideale (a), (b) mit $(a) \subset (b)$, dann ist S die disjunkte Vereinigung seiner Linkshauptideale.*

Lemma 2.18.4 *Ist S eine linkskongruenzvertauschbare Halbgruppe und gibt es Linkshauptideale (c), (d) mit $(c) \cap (d) = \emptyset$ sowie (e), (f) mit $(e) \subset (f)$, dann gibt es Linkshauptideale (a), (a'), (b) mit*

$$(a) \cap (a') = \emptyset \text{ und } (a) \subset (b). \tag{2.2}$$

Beweis: 1. Fall: Sei $(e) \subset (f)$. Gibt es ein Linkshauptideal (c) mit $(e) \cap (c) = \emptyset$, dann setzen wir $(a) := (e)$, $(a') := (c)$ und $(b) := (f)$.

2. Fall: Sei nun $(e) \subset (f)$ und jedes andere Linkshauptideal mit (e) vergleichbar. Laut Voraussetzung gibt es $(c), (d)$ mit $(c) \cap (d) = \emptyset$. Da (c) und (d) disjunkt und beide mit (e) vergleichbar sind, gilt $(c) \subset (e)$ und $(d) \subset (e)$. Daher erfüllen $(a) := (c)$, $(a') := (d)$ und $(b) := (e)$ das Gewünschte. □

Lemma 2.18.5 *Sei S linkskongruenzvertauschbar und $(a) \subset (b)$. Dann gilt $(a') \subset (b)$ für alle Linkshauptideale (a') mit $(a) \cap (a') = \emptyset$.*

Beweis: Wir zeigen $(a) \cup (a') =: A \subseteq (b)$. Da A ein Linksideal ist, mit $A \cap (b) \supseteq (a) \neq \emptyset$ folgt aus Lemma 2.18.1, daß A und (b) vergleichbar sind. Gilt $A \subseteq (b)$, dann sind wir fertig.

Angenommen $(b) \subseteq A$. Wären (b) und (a') disjunkt, dann erhielte man $(b) \subseteq (a)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher sind (b) und (a') vergleichbar. Aus $(b) \subseteq (a')$ würde $(b) \cap (a) = \emptyset$ folgen, wieder im Widerspruch zu $(a) \subset (b)$. Daher bleibt nur die Möglichkeit $(a') \subseteq (b)$ und damit $A \subseteq (b)$ über. □

Lemma 2.18.6 *Sei S linkskongruenzvertauschbar und (a), (a') disjunkt. Dann gibt es kein $(c) \subset (a)$.*

Beweis: Ist $(c) \subset (a)$, dann gilt auch $(c) \cap (a') = \emptyset$. Nach obigem Lemma folgt daraus aber $(a') \subset (a)$ im Widerspruch zu $(a) \cap (a') = \emptyset$. □

Sei (a) ein Linkshauptideal, zu dem es ein Linkshauptideal (b) mit $(a) \subset (b)$ gibt. Wir definieren folgendes Linksideal:

$$I_{(a)} := \bigcap_{(b) \supset (a)} (b). \tag{2.3}$$

Lemma 2.18.7 *Sei S linkskongruenzvertauschbar und (a) ein Linkshauptideal, zu dem es Linkshauptideale (a'), (b) gibt, sodaß (2.2) erfüllt ist. Sei $I_{(a)}$ wie oben definiert. Dann gibt es kein (c) mit $(a') \subset (c) \subset I_{(a)}$. Daher gilt*

$$I_{(a)} = \bigcap_{(b)\supset(a')} (b) = I_{(a')}.$$

Daraus folgt außerdem $(a) \neq I_{(a)}$.

Beweis: Für jedes (c) mit $(a') \subset (c)$ gilt wegen $(a) \cap (a') = \emptyset$ und Lemma 2.18.5 auch $(a) \subset (c)$ und daher $I_{(a)} \subset (c)$. Außerdem folgt aus Lemma 2.18.5 $(a') \subset I_{(a)}$.

Wäre $(a) = I_{(a)}$, dann erhielte man $(a') \subset (a)$ im Widerspruch zu (2.2). □

Wir können nun das bisherige zusammenfassen:

Satz 2.18.8 *Sei S eine linkskongruenzvertauschbare Halbgruppe. Dann gilt für S eine der folgenden Aussagen:*

1. *Die Linksideale von S bilden eine Kette.*

2. *S ist die disjunkte Vereinigung seiner Linkshauptideale.*

3. *Es gibt ein Linksideal I, sodaß alle Linksideale mit I vergleichbar sind. Die Linksideale, die I enthalten, bilden eine Kette. I ist der Schnitt von Linkshauptidealen und entweder die disjunkte Vereinigung von Linkshauptidealen oder selbst ein Linkshauptideal.*

Beweis: Gibt es in S keine disjunkten Linkshauptideale, dann erhalten wir aus Folgerung 2.18.3 Fall 1.

Wenn es disjunkte Linkshauptideale gibt, aber keine Linkshauptideale (a), (b) mit $(a) \subset (b)$, dann erhalten wir wieder mit Hilfe von Folgerung 2.18.3 Fall 2.

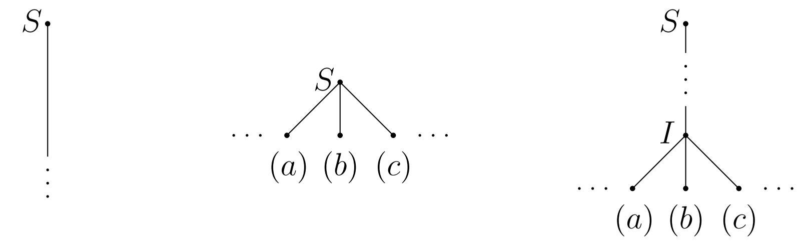
Im dritten Fall können wir annehmen, daß es disjunkte Linkshauptideale gibt und zwei Linkshauptideale, sodaß das eine das andere echt enthält. Dann gibt es nach Lemma 2.18.4 (a), (a'), (b), die (2.2) erfüllen. Es bleibt zu zeigen, daß das in (2.3) definierte Linksideal $I_{(a)} =: I$ die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Angenommen, es gäbe ein Linksideal C mit $C \cap I = \emptyset$. Dann gilt $(c) \cap I = \emptyset$ für alle $(c) \subseteq C$. Wegen $(a) \subset I$ gilt auch $(a) \cap (c) = \emptyset$. Daraus folgt aber für alle $(b) \supset (a)$ mit Hilfe von Lemma 2.18.5 $(c) \subset (b)$, also $(c) \subseteq I$, was im Widerspruch zur Wahl von (c) steht. Jedes Linksideal ist also mit I vergleichbar.

Da zwei Linksideale C, D mit $I \subseteq C$, $I \subseteq D$ nicht disjunkt sind, folgt aus Lemma 2.18.1, daß die Linksideale über I eine Kette bilden.

Laut Definition ist I ein Schnitt von Linkshauptidealen und nach Lemma 2.18.7 enthält I die disjunkte Vereinigung von (a) und allen (a') mit $(a) \cap (a') = \emptyset$. Angenommen es gäbe ein $c \in I$, das in keinem der (a) bzw. (a') enthalten ist. Wäre $(c) \cap (a) = \emptyset$, so wäre (c) ein (a'). Ist $(c) \cap (a) \neq \emptyset$, so ist nach Lemma 2.18.1 nur $(a) \subset (c)$ möglich. Aus $(c) \subseteq I$ folgt nach Lemma 2.18.7 $(c) = I$. $\square$

Die Lage der Linksideale von S zueinander läßt sich mit folgendem Ausschnitt aus dem Hasse-Diagramm des Verbands der Linksideale verdeutlichen:



Fall 1 Fall 2 Fall 3

Bemerkung 2.18.9 Im zweiten und dritten Fall enthält keines der minimalen Linkshauptideale ein echtes Linksideal. Sei $b \in (a)$ für eines dieser Linkshauptideale. Dann ist $(a)b$ ein in (a) enthaltenes Linksideal und daher gilt $(a)b = (a) = (b)$. Die minimalen Linkshauptideale sind somit linkseinfache Unterhalbgruppen.

Ist S eine periodische oder reguläre Halbgruppe, dann sind alle minimalen Linkshauptideale Linksgruppen, da sie ein Idempotentes enthalten.

Ist S kommutativ, dann fallen die Begriffe Linksideal und Ideal zusammen, und es kann laut Folgerung 2.18.2 nur Fall 1 auftreten.

Gilt $0 \in S$, dann enthält jedes Linksideal 0 und daher treten die Fälle 2 und 3 nicht auf. Bei $1 \in S$ tritt Fall 2 nicht auf, wegen $S = (1)$.

Linkskongruenzvertauschbare Halbgruppen sind insbesondere kongruenzvertauschbar. Daher bilden die Ideale eine Kette und für die Linksideale tritt einer der drei Fälle auf. Für die Fälle 2 und 3 läßt sich noch zusätzlich Folgendes aussagen:

Folgerung 2.18.10 *Sei S linkskongruenzvertauschbar.*

1. *Gilt für die Linksideale Fall 2 aus Satz 2.18.8, dann ist S eine einfache Halbgruppe.*
2. *Gilt Fall 3 aus Satz 2.18.8, dann gibt es ein minimales Ideal K mit $I \subseteq K$, wobei I das Ideal aus Satz 2.18.8, Fall 3, ist. (K ist eine einfache Unterhalbgruppe und wird als Kern von S bezeichnet).*

Beweis: 1.: Jedes Ideal J von S ist auch ein Linksideal. In Fall 2 ist jedes Linksideal eine disjunkte Vereinigung von Linkshauptidealen, also auch J. Angenommen $J \neq S$. Dann gibt es ein (a) mit $(a) \cap J = \emptyset$. Sei $j \in J$. Dann gilt $ja \in (a) \cap J \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Wahl von (a).

2.: Wir definieren $K := \bigcap J$, wobei J alle Ideale durchläuft. Gilt $K \neq \emptyset$, dann ist K minimal und nach [Cli1], Corollary 2.30 eine einfache Unterhalbgruppe. Da die Ideale von S eine Kette bilden, der ein Unterverband des Verbandes aller Linksideale ist, ist K nicht leer. Weiters ist es nicht möglich, daß K ein Linksideal unter I ist, da die Linksideale unter I disjunkte Vereinigungen von Linkshauptidealen sind, und diese können keine Ideale sein, was man analog zum obigen Fall sieht. □

Kapitel 3

Ω-Halbgruppen

3.1 Definitionen

Im Folgenden sollen nun die Begriffe aus den vorhergehenden Kapiteln auf Ω-Halbgruppen übertragen werden (für genaue Definitionen aus der universellen Algebra siehe [Ihr1]). Die gewonnenen Aussagen können dann zwar auf andere algebraische Strukturen zurückspezialisiert werden, jedoch erschwert diese Allgemeinheit wiederum die Untersuchungen. Daher werden wir später die Klasse der untersuchten Ω-Halbgruppen wieder einschränken.

Wir beschränken uns hier auf Algebren, die eine binäre rechtsdistributive, assoziative Operation besitzen. Die Einschränkung, daß die Operation binär ist, kann jedoch auch weggelassen werden, wobei viele Aussagen trotzdem erhalten bleiben, jedoch wird die Notation dadurch wesentlich komplizierter. In Analogie zu den Kapiteln 1 und 2 betrachten wir zur Definition des Radikals als zugehörige Klasse von Moduln die der einfachen Moduln. Auch hier können stattdessen sogenannte allgemeine Modulklassen betrachtet werden, was wir hier aber nicht machen werden. Diese allgemeineren Fälle werden in [Mli1], [Mli2],[Mli3] und [Mli4] behandelt.

Definition 3.1.1 Eine Algebra A mit Operationensystem $\Omega \cup \{\star\}$ heißt **Ω-Halbgruppe**, falls $\star$ eine binäre, assoziative und **rechtsdistributive** Operation ist. Rechtsdistributiv heißt, daß für alle $\omega \in \Omega$ die Gleichung

$$\omega(a_1, \ldots, a_{n(\omega)}) \star b = \omega(a_1 \star b, \ldots, a_{n(\omega)} \star b)$$

gilt ($n(\omega)$ bezeichnet die Stelligkeit von ω). Wie auch bei Halbgruppen lassen wir $\star$ ab jetzt meistens weg. Sei A ab nun eine Ω-Halbgruppe einer fixen Varietät $\mathcal{V}$. Ein **(Links)-A-Modul** ist eine Algebra (M, Ω, A), wobei jedes $a \in A$ als einstellige Operation auf M operiert. In M sollen alle Gleichungen von $\mathcal{V}$ erfüllt sein, die nur mit Operationen aus Ω formuliert sind, und zusätzlich für alle $\omega \in \Omega$ folgende Gleichungen:

$$a(bm) = (ab)m, \quad a, b \in A, m \in M,$$

$$\omega(a_1, \ldots, a_{n(\omega)})m = \omega(a_1 m, \ldots, a_{n(\omega)} m), \quad a_1, \ldots, a_{n(\omega)} \in A, m \in M.$$

M heißt **einfach**, wenn $\operatorname{Con} M = \{\Delta, \nabla\}$ gilt. Die **Annulatoren** $\operatorname{Ann} m$, $m \in M$, und $\operatorname{Ann} M$ sind analog wie im Halbgruppenfall definiert, ebenso **treue** Moduln. Das **Radikal** $R(A)$ von A definiert man wieder als Durchschnitt über alle Annulatoren einfacher A-Moduln. Gilt $R(A) = \Delta$, dann nennt man A **halbeinfach**, und es gilt, daß sich eine halbeinfache Ω-Halbgruppe als subdirektes Produkt **primitiver** Ω-Halbgruppen (d.h. Ω-Halbgruppen mit treuem, einfachem Modul) darstellen läßt.

Eine Äquivalenzrelation Θ auf A heißt **Linkskongruenz**, wenn für alle $\omega \in \Omega$ aus $(a_1, a'_1) \in \Theta, \ldots, (a_{n(\omega)}, a'_{n(\omega)}) \in \Theta$

$$(\omega(a_1, \ldots, a_{n(\omega)}), \omega(a'_1, \ldots, a'_{n(\omega)})) \in \Theta$$

folgt, und

$$(a, a') \in \Theta \Rightarrow (ba, ba') \in \Theta, \forall b \in A$$

gilt. (Linkskongruenzen sind also genau die Kongruenzrelationen von A aufgefaßt als A-Modul). Die Menge der Linkskongruenzen auf A bezeichnen wir wieder mit $\operatorname{LCon} A$.

Bemerkung 3.1.2 Beispiele für die obige Definition eines Moduls erhält man in natürlicher Weise, wenn man zu einer beliebigen Algebra M mit A eine Unteralgebra von M^M bezeichnet, wobei die Operationen aus Ω auf A punktweise definiert sind und $\star$ die Hintereinanderausführung von Abbildungen bezeichnet.

Man beachte aber, daß diese Moduldefinition auf Ringen nicht mit dem üblichen Modulbegriff übereinstimmt, da $a(m + n) = am + an$ nicht gefordert wird. Weiters wird z.B. bei Monoiden nicht $1m = m$ vorausgesetzt. Die

Ergebnisse dieses Kapitels führen für Ringe mit dieser allgemeineren Moduldefinition ebenfalls zu einem Interpolationssatz (Satz 3.2.5), der bei Spezialisierung auf Moduln im üblichen Sinn mit dem Resultat von Jacobson übereinstimmt. Die zur Definition eines Moduls herangezogenen zwei Gleichungen ergeben sich wie bereits erwähnt in natürlicher Weise bei Funktionenalgebren mit punktweiser Definition der Operationen. Wie im Ringfall kann es aber oft nützlich sein, die Gültigkeit weiterer Gleichungen zu verlangen, die man aus den mit Hilfe von $\star$ formulierten Gleichungen von $\mathcal{V}$ durch sinnvolle Erstezung der Buchstaben in den autretenden Wörtern durch Elemente aus A und M erhält (siehe z.B. Satz 3.5.3).

Treue bedeutet auch hier nichts anderes, als daß zwei verschiedenen Elementen aus A zwei verschiedene Abbildungen $M \to M$ zugeordnet werden.

Wie bei Ringen und Halbgruppen läßt sich leicht nachrechnen, daß $\operatorname{Ann} m$ eine Linkskongruenz und $\operatorname{Ann} M$ eine Kongruenzrelation ist und damit auch $R(A)$.

Definition 3.1.3 Sei $\mathcal{W}$ eine Varietät. Wird jedem $A \in \mathcal{W}$ eine Kongruenzrelation $\rho(A)$ zugeordnet, die die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt, dann nennt man $\rho(A)$ ein **Hoehnke-Radikal**.

(H1) Für jeden Homomorphismus $\phi : A \to \phi(A)$ gilt $\phi(\rho(A)) \subseteq \rho(\phi(A))$, wobei $\phi(\rho(A))$ komponentenweise gebildet wird.

(H2) $\rho(A/\rho(A)) = \Delta$.

Wir können nun Bemerkung 1.1.4 in diesem allgemeinen Rahmen formulieren:

Satz 3.1.4 *Sei A eine Ω-Halbgruppe. Dann ist $R(A)$ ein Hoehnke-Radikal.*

Beweis: In [Mli4], Theorem 2.3 wird Folgendes gezeigt: Sei jedem $A \in \mathcal{V}$ eine Klasse $K(A)$ von A-Moduln zugeordnet, sodaß für jeden Homomorphismus $\phi : A \to \phi(A)$ gilt:

1. Jeder Modul $M \in K(\phi(A))$ ist unter $am := \phi(a)m$, $a \in A$, $m \in M$, ein Element von $K(A)$.

2. Sei $M \in K(A)$ und gelte $\ker \phi \subseteq \operatorname{Ann} M$. Dann ist M unter $\phi(a)m := am$, $a \in A$, $m \in M$, ein Element von $K(\phi(A))$.

Man nennt $K(A)$ eine allgemeine Modulklasse. Die Kongruenzrelation

$$\rho(A) := \bigcap_{M \in K(A)} \operatorname{Ann} M$$

ist ein Hoehnke-Radikal.

In unserem Fall wählen wir für $K(A)$ die Klasse aller einfachen A-Moduln. Ist M ein einfacher $\phi(A)$-Modul, dann ist er auch als A-Modul einfach. Umgekehrt ist M ein einfacher A-Modul und gilt $\ker\phi \subseteq \operatorname{Ann} M$, dann ist $\phi(a)m := am$ wohldefiniert. M wird somit zu einem einfachen $\phi(A)$-Modul. $\square$

Weiters gilt:

Satz 3.1.5 *Sei A eine Ω-Halbgruppe, dann ist $R(A)$ die kleinste Kongruenzrelation auf A, sodaß der Faktor halbeinfach ist.*

Beweis: Folgt allgemein für Hoehnke-Radikale aus den Eigenschaften (H1) und (H2). $\square$

3.2 Eine allgemeine Charakterisierung von Interpolation

In diesem Abschnitt formulieren wir nun Satz 2.12.3 für Ω-Halbgruppen, nachdem die dazu notwendigen Definitionen, die sich wieder an der Ringtheorie orientieren, gegeben wurden. Da dieser zentrale Satz der Ausgangspunkt für die meisten Interpolationssätze dieser Arbeit ist, wollen wir auch den Beweis wiederholen.

Definition 3.2.1 Sei A eine Ω-Halbgruppe und M ein A-Modul. M heißt **strikt zyklisch** wenn es ein Element $m \in M$ gibt mit $Am = M$. m nennt man wieder ein **strikt erzeugendes Element**. A **interpoliert** auf $m_1, \ldots, m_n \in M$, wenn es zu beliebigen $p_1, \ldots, p_n \in M$ immer ein $a \in A$ mit $am_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n$, gibt.

Satz 3.2.2 *([Mli3], Theorem 2). Sei A eine Ω-Halbgruppe, M ein A-Modul und $m_1, \ldots, m_n \in M$. A interpoliert genau dann auf $m_1, \ldots, m_n$, wenn*

$m_1, \ldots, m_n$ strikt erzeugende Elemente sind und

$$(\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i) \circ \operatorname{Ann} m_j = \nabla, \quad j = 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

gilt.

Beweis: $\Rightarrow$: Interpoliere A auf $m_1, \ldots, m_n$. Dann sind natürlich die Elemente $m_1, \ldots, m_n$ strikt erzeugend. Sei $2 \leq j \leq n$ und $a, b \in A$ beliebig. Da A speziell auch auf $m_1, \ldots, m_j$ interpoliert, gibt es ein $c \in A$ mit $cm_i = am_i$, $i = 1, \ldots, j-1$, und $cm_j = bm_j$, mit anderen Worten $(a, b) \in (\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i) \circ \operatorname{Ann} m_j$.

$\Leftarrow$: Sei nun (3.1) erfüllt und $m_1, \ldots, m_n$ strikt erzeugend. Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion.

$j = 1$: Da m_1 strikt erzeugend ist, interpoliert A sicher auf m_1.

$j - 1 \to j$: Angenommen A interpoliert auf $m_1, \ldots, m_{j-1}$, $2 \leq j \leq n$, und seien $p_1, \ldots, p_j \in M$ beliebige Elemente. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $a \in A$ mit $am_i = p_i$, $i = 1, \ldots, j-1$, und da m_j strikt erzeugend ist, ein $b \in A$ mit $bm_j = p_j$. Wegen (3.1) existiert ein $c \in A$ mit $(a, c) \in \bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i$ und $(c, b) \in \operatorname{Ann} m_j$, was gleichbedeutend ist mit $cm_i = p_i$, $i = 1, \ldots, j$. □

Definition 3.2.3 Sei A eine Ω-Halbgruppe. $\Theta \in \operatorname{LCon} A$ heißt **modular**, wenn es für alle $a \in A$ ein $e \in A$ gibt mit $(a, ae) \in \Theta$. e nennt man eine **Rechtseins** mod Θ.

Wie im Halbgruppenfall (Satz 2.2.8) beweist man

Satz 3.2.4 *Sei M ein A-Modul. Dann ist ein Element $m \in M$ genau dann strikt erzeugend, wenn folgende Aussagen gelten:*

1. $\operatorname{Ann} m$ *ist modular.*
2. $M \cong A/\operatorname{Ann} m$ *mit* $m \mapsto [e]_{\operatorname{Ann} m}$, *wobei* e *eine Rechtseins* mod $\operatorname{Ann} m$ *ist.*

Daraus folgt nun die Umformulierung von Satz 2.12.3 für Ω-Halbgruppen.

Satz 3.2.5 *Sei M ein einfacher A-Modul. A interpoliert auf den strikt erzeugenden Elementen $m_1, \ldots, m_n \in M$ genau dann, wenn*

$$\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} m_j, \quad j = 2, \ldots, n$$

und

$$(\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i) \circ \operatorname{Ann} m_j = \operatorname{Ann} m_j \circ (\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i), \quad j = 2, \ldots, n$$

gilt. Analoge Beziehungen zwischen den Annulatoren gelten dann für jede Numerierung von $m_1, \ldots, m_n$.

Beweis: Nach Satz 3.2.2 interpoliert A auf $m_1, \ldots, m_n$ genau dann, wenn

$$(\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i) \circ \operatorname{Ann} m_j = \nabla, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Nach obigem Satz gilt $M \cong A/\operatorname{Ann} m_i$, $i = 1, \ldots, n$. Da M einfach ist, sind die $\operatorname{Ann} m_i$ maximale, modulare Linkskongruenzen, also ist für jedes $\Theta \in \operatorname{LCon} A$, $\Theta \not\subseteq \operatorname{Ann} m_i$, $\Theta \vee \operatorname{Ann} m_i = \nabla$. Gilt für zwei Äquivalenzrelationen $\Psi \circ \Phi = \Phi \circ \Psi$, dann folgt $\Psi \vee \Psi = \Psi \circ \Phi$ (siehe [Ihr1] Satz 1.4.4). Setzt man $\Phi = \bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i$ und $\Psi = \operatorname{Ann} m_j$, dann erhält man die gewünschte Aussage. □

Bemerkung 3.2.6 In den Sätzen 3.2.2 und 3.2.5 sind die jeweiligen zur Interpolationseigenschaft äquivalenten Bedingungen für jede Numerierung der Elemente gültig, da auch die Interpolationseigenschaft von der Numerierung unabhängig ist. Interpoliert A nicht auf einer Menge $m_1, \ldots, m_n \in M$, dann heißt das nur, das die jeweiligen Bedingungen für ein $j \in \{2, \ldots, n\}$ verletzt sind.

3.3 Eine weitere Charakterisierung der Interpolationseigenschaft für Ω-Halbgruppen

Betrachtet man Satz 2.15.2 und dessen Beweis, dann bemerkt man, daß die Halbgruppenstruktur nur unwesentlich verwendet wird. Der Beweis läßt sich beinahe wörtlich übertragen, und man erhält folgenden Satz.

Satz 3.3.1 *Sei M ein einfacher A-Modul und $m_1, \ldots, m_n \in M$ strikt erzeugende Elemente. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

1. *A interpoliert auf $m_1, \ldots, m_n$.*

2. *$\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i$ ist modular mit Rechtseins e und*

$$A/\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i \cong \prod_{i=1}^n A/\operatorname{Ann} m_i$$

mit

$$[e]_{\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i} \mapsto ([e]_{\operatorname{Ann} m_1}, \ldots, [e]_{\operatorname{Ann} m_n}).$$

Bemerkung 3.3.2 Da im Beweis des Satzes die Endlichkeit von $\{m_1, \ldots, m_n\}$ nicht eingeht, ist er auch für unendliche Teilmengen von M gültig. Er ist also auch korrekt, wenn man $m_1, \ldots, m_n$ durch $(m_i)_{i \in I}$ ersetzt.

3.4 Unabhängigkeit

Im Ringfall war die Interpolationseigenschaft von R auf Modulelementen $m_1, \ldots, m_n \in M$ äquivalent zu deren linearen Unabhängigkeit, aufgefaßt als Vektoren über $\operatorname{End} M$. Nun stellt sich die Frage, ob es einen Unabhängigkeitsbegriff gibt (der natürlich den der linearen Unabhängigkeit als Spezialfall enthalten soll), sodaß auch im Fall von Ω-Halbgruppen Interpolation und Unabhängigkeit äquivalent sind. Wir verwenden dazu den Begriff des Matroids, der zwei wesentliche Eigenschaften der linearen Unabhängigkeit zur Definition eines allgemeinen Unabhängigkeitsbegriffs heranzieht. Es wird gezeigt, daß im allgemeinen Unabhängigkeit und Interpolation nicht äquivalent sind, unter der Voraussetzung der Linkskongruenzvertauschbarkeit der Ω-Halbgruppe A jedoch schon.

Definition 3.4.1 Sei M eine Menge und I ein System von endlichen Teilmengen von M. Das Paar (M, I) nennt man ein **Matroid**, wenn Folgendes gilt:

(M1) $\emptyset \in I$.

(M2) Aus $X \in I$ und $Y \subseteq X$ folgt $Y \in I$.

(M3) Gilt $X, Y \in I$ und $|X| = |Y| + 1$, dann gibt es ein $x \in X \setminus Y$ mit $Y \cup \{x\} \in I$.

Die Elemente von I nennt man **unabhängige** Mengen.

Speziell bilden die endlichen, linear unabhängigen Teilmengen eines Vektorraums ein Matroid ((M3) entspricht dabei dem Austauschsatz von Steinitz). Der Satz von Jacobson zeigt die Äquivalenz zwischen linearer Unabhängigkeit und Interpolation. Mit Hilfe des Begriffs eines Matroids, kann man sich nun die Frage stellen, wann Interpolation äquivalent ist zur Unabhängigkeit im obigen allgemeineren Sinn. Interpoliert eine Ω-Halbgruppe auf Elementen $m_1, \ldots, m_n \in M$ eines A-Moduls, dann auch auf jeder Teilmenge von $\{m_1, \ldots, m_n\}$, daher sind (M1) und (M2) immer erfüllt. Folgendes Beispiel zeigt, daß das für (M3) nicht immer der Fall sein muß:

Beispiel 3.4.2 Sei $M := \{x, y, z\}$ und $S := \{f \in M^M \mid fx = x\} \cup \{y, z\}$ (y, z bezeichnen die jeweiligen konstanten Abbildungen). Man rechnet leicht nach, daß S eine Unterhalbgruppe von M^M bildet, und M somit ein treues S-System ist. Aus Satz 2.3.15 folgt, daß M einfach ist, und S daher eine primitive Halbgruppe. S interpoliert auf $\{x\}$ und $\{y, z\}$ aber weder auf $\{x, y\}$, noch auf $\{x, z\}$. Man erhält also durch die (endlichen) Teilmengen von M, auf denen S interpoliert kein Matroid.

Im Folgenden beweisen wir zwei Lemmata, die wir zum Beweis von Satz 3.4.6 benötigen. Wir definieren nun unabhängige Teilmengen von M.

Definition 3.4.3 Sei A eine Ω-Halbgruppe in der alle modularen Linkskongruenzen vertauschen, und M ein einfacher A-Modul. Wir nennen $\{m_1, \ldots, m_n\}$ **unabhängig**, wenn A auf $m_1, \ldots, m_n$ interpoliert und sonst **abhängig**.

Lemma 3.4.4 *Sei M ein einfacher A-Modul. Vertauschen alle modularen Linkskongruenzen von A, dann ist eine Menge von strikt Erzeugenden $\{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq M$ genau dann unabhängig, wenn*

$$\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} m_j, \quad j = 2, \ldots, n$$

gilt. (Es genügt eigentlich die Vertauschbarkeit von Annulatoren und deren Durchschnitte zu verlangen.)

Beweis: $\Rightarrow$: Folgt aus Satz 3.2.5.

$\Leftarrow$: Wir führen einen Induktionsbeweis.

$n = 2$: $m, n \in M$ seien strikt Erzeugende und $\operatorname{Ann} m \not\subseteq \operatorname{Ann} n$. Da $\operatorname{Ann} m$ and $\operatorname{Ann} n$ beide modular sind, vertauschen sie laut Voraussetzung. Die Unabhängigkeit von $\{m, n\}$ folgt daher aus Satz 3.2.5.

$n \to n+1$: Wir nehmen an, daß für eine Menge von strikt Erzeugenden $\{m_1, \ldots, m_{n+1}\} \subseteq M$ die Aussagen

$$\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} m_j, \quad j = 2, \ldots, n+1, \tag{3.2}$$

gelten. Wenn wir zeigen können, daß die Linkskongruenzen $\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i$, $j = 2, \ldots, n+1$, modular sind, dann folgt die Unabhängigkeit von $\{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$ wieder aus Satz 3.2.5. Laut Induktionsvoraussetzung impliziert (3.2) die Unabhängigkeit von $\{m_1, \ldots, m_n\}$. Es gibt also ein $e \in A$ mit $em_i = m_i$, $i = 1, \ldots, n$, woraus wir $(a, ae) \in \operatorname{Ann} m_i$ für alle $a \in A$, $i = 1, \ldots, n$, erhalten. e daher die gewünschte Rechtseins mod $\bigcap_{i=1}^{j-1} \operatorname{Ann} m_i$, $j = 2, \ldots, n+1$. $\square$

Lemma 3.4.5 *Sei M ein einfacher A-Modul. Wir nehmen wieder an, daß alle modularen Linkskongruenzen von A vertauschen. Ist $\{m_1, \ldots, m_n\}$ eine unabhängige Teilmenge von M und sind die Teilmengen $\{m_1, \ldots, m_n, p\}$, $\{m_1, \ldots, m_n, q\}$ abhängig, dann ist $\{m_2, \ldots, m_n, p, q\}$ abhängig.*

Beweis: Ist $\{m_2, \ldots, m_n, p\}$ abhängig, dann auch $\{m_2, \ldots, m_n, p, q\}$.

Wir setzen nun die Unabhängigkeit von $\{m_2, \ldots, m_n, p\}$ voraus. Nach dem eben gezeigten Lemma gilt $\bigcap_{i=2}^{j} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} m_j$, $j = 2, \ldots, n-1$, und $\bigcap_{i=2}^{n} \operatorname{Ann} m_i \not\subseteq \operatorname{Ann} p$. Da $\{m_1, \ldots, m_n, p\}$ als abhängig vorausgesetzt wurde, folgt somit

$$(\bigcap_{i=2}^{n} \operatorname{Ann} m_i) \cap \operatorname{Ann} p \subseteq \operatorname{Ann} m_1.$$

Aus der Unabhängigkeit von $\{m_1, \ldots, m_n\}$ und der Abhängigkeit von $\{m_1, \ldots, m_n, q\}$ erhalten wir analog

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ann} m_i \subseteq \operatorname{Ann} q.$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned}(\bigcap_{i=2}^{n} \operatorname{Ann} m_i) \cap \operatorname{Ann} p &= (\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ann} m_i) \cap \operatorname{Ann} p \\ &\subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ann} m_i \\ &\subseteq \operatorname{Ann} q.\end{aligned}$$

$\{m_2, \ldots, m_n, p, q\}$ ist daher nach Satz 3.2.5 abhängig. □

Wir zeigen nun, daß in Definition 3.4.3 die Bezeichnung unabhängig berechtigt war:

Satz 3.4.6 *Sei M ein einfacher A-Modul. Vertauschen alle modularen Linkskongruenzen von A, dann bilden die unabhängigen Teilmengen von M ein Matroid.*

Beweis: (M1) und (M2) gelten laut Definition der Unabhängigkeit. Es bleibt die Eigenschaft (M3) zeigen. Wir führen einen Induktionsbeweis:

$n = 1$: Seien $Y = \{m\}$ und $X = \{p, q\}$ unabhängige Teilmengen von M. Wir nehmen an $\{m, p\}$ und $\{m, q\}$ wären abhängig. Dann folgt aus Satz 3.2.5, da die Numerierung dort irrelevant ist:

$$\operatorname{Ann} p = \operatorname{Ann} m = \operatorname{Ann} q$$

und somit die Abhängigkeit von $\{p, q\}$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

$n - 1 \to n$: $Y = \{m_1, \ldots, m_n\}$ und $X = \{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$ seien unabhängig, und wir nehmen an, die Mengen $\{m_1, \ldots, m_n, p_i\}$, $i = 1, \ldots, n+1$, wären abhängig. Wegen $|\{m_2, \ldots, m_n\}| = n - 1$ gibt es ein Element $p_i \in \{p_1, \ldots, p_n\} \setminus \{m_2, \ldots, m_n\}$ (o.B.d.A. $p_i = p_1$), sodaß $\{m_2, \ldots, m_n, p_1\}$ unabhängig ist. Ebenso existiert ein $p_j \in \{p_1, \ldots, p_n\} \setminus \{m_3, \ldots, m_n, p_1\}$ (o.B.d.A. $p_j = p_2$), sodaß $\{m_3, \ldots, m_n, p_1, p_2\}$ unabhängig ist. Fahren wir in dieser Weise fort, dann können wir X als so numeriert voraussetzen, daß für $k = 2, \ldots, n$

$$\{m_k, \ldots, m_n, p_1, \ldots, p_{k-1}\}$$

unabhängig ist. Mit Hilfe des vorhergehenden Lemmas erhalten wir die Abhängigkeit von $\{m_2, \ldots, m_n, p_1, p_2\}$ und $\{m_2, \ldots, m_n, p_1, p_3\}$. Daraus folgt wieder mit dem Lemma die Abhängigkeit von $\{m_3, \ldots, m_n, p_1, p_2, p_3\}$ und analog die von $\{m_3, \ldots, m_n, p_1, p_2, p_4\}$, woraus wir die Abhängigkeit von $\{m_4, \ldots, m_n, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ folgern, usw. Führen wir dieses Verfahren fort, dann erhalten wir letztendlich die Abhängigkeit von $\{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

3.5 Eine Charakterisierung der Unabhängigkeit

Wir wissen bisher im Falle der Vertauschbarkeit der modularen Linkskongruenzen von A, daß die unabhängigen Teilmengen eines einfachen A-Moduls die Struktur eines Matroids tragen. Zur Charakterisierung dieser Unabhängigkeitsrelation können wir Lemma 3.4.4 benützen. In diesem Abschnitt soll für eine spezielle Klasse von Ω-Halbgruppen eine weitere Charakterisierung der Unabhängigkeit gegeben werden (vergleiche Satz 2.17.1). Als Anwendung dieser Charakterisierung folgern wir direkt den Dichtesatz von Jacobson für Ringe.

Satz 3.5.1 *A sei eine Ω-Halbgruppe, in der alle modularen Linkskongruenzen vertauschen, und M ein einfacher A-Modul. Für alle strikt Erzeugenden $m \in M$ seien alle Rechtseinsen* mod $\operatorname{Ann} m$ *in einer* $\operatorname{Ann} m$*-Klasse enthalten (wie im Halbgruppenfall können wir dann von einer* **Rechtseins von** m *sprechen). Sei $\{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq M$ unabhängig und m_{n+1} ein strikt Erzeugendes von M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$\{m_1, \ldots, m_n, m_{n+1}\}$ ist abhängig.*
2. *Es gibt ein $\phi \in \operatorname{Hom}(M^n, M)$ mit $\phi(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}$.*

Beweis: 1.$\Rightarrow$2.: Wir bezeichnen die Elemente von M^n mit $\vec{m}$. Da $\{m_1, \ldots, m_n\}$ unabhängig ist, gibt es für alle $\vec{p} \in M$ ein $a \in A$ mit $a\vec{m} = \vec{p}$. Damit definieren wir

$$\phi : M^n \to M, \vec{p} \mapsto am_{n+1}.$$

Wegen Lemma 3.4.4 gilt $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} m_i \subseteq \operatorname{Ann} m_{n+1}$. Aus $a\vec{m} = b\vec{m}$ folgt also $am_{n+1} = bm_{n+1}$. ϕ ist somit wohldefiniert. Sei ω eine k-stellige $(k \geq 0)$

Operation von M. Dann ist ϕ wegen

$$\begin{aligned}\phi(\omega(\vec{p_1},\ldots,\vec{p_k})) &= \phi(\omega(a_1\vec{m},\ldots,a_k\vec{m})) \\ &= \phi(\omega(a_1,\ldots,a_k)\vec{m}) \\ &= \omega(a_1,\ldots,a_k)m_{n+1} \\ &= \omega(a_1m_{n+1},\ldots,a_km_{n+1}) \\ &= \omega(\phi\vec{p_1},\ldots,\phi\vec{p_k})\end{aligned}$$

auch ein Homomorphismus. Da $\{m_1,\ldots,m_n\}$ unabhängig ist, gibt es ein $e \in A$ mit $e\vec{m} = \vec{m}$. e ist eine Rechtseins mod $\mathrm{Ann}\,\vec{m} \subseteq \mathrm{Ann}\,m_{n+1}$. Sei nun $f \in A$ ein Element mit $fm_{n+1} = m_{n+1}$, dann gilt (nach der Voraussetzung, daß alle Rechtseinsen mod $\mathrm{Ann}\,m_{n+1}$ in einer Klasse liegen): $em_{n+1} = fm_{n+1} = m_{n+1}$. Wir erhalten $\phi\vec{m} = \phi(e\vec{m}) = em_{n+1} = m_{n+1}$.

$\Leftarrow$: Sei $\phi \in \mathrm{Hom}\,(M^n, M)$ mit $\phi\vec{m} = m_{n+1}$. Dann überträgt sich $a\vec{m} = b\vec{m}$ über ϕ zu $am_{n+1} = bm_{n+1}$, woraus $\mathrm{Ann}\,\vec{m} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}\,m_i \subseteq \mathrm{Ann}\,m_{n+1}$ und damit die Abhängigkeit von $\{m_1,\ldots,m_n,m_{n+1}\}$ folgt. $\Box$

Bemerkung 3.5.2 Wir können also bei obigen Voraussetzungen abhängige Teilmengen so charakterisieren: Eine Menge von strikt Erzeugenden $\{m_1,\ldots,m_n\}$ ist genau dann abhängig, wenn es eine echte Teilmenge (o.B.d.A. $\{m_1,\ldots,m_i\}$, $i < n$) und ein Element aus $\{m_1,\ldots,m_n\}$ (o.B.d.A. m_{i+1}) sowie ein $\phi \in \mathrm{Hom}\,(M^i, M)$ gibt, sodaß $\phi(m_1,\ldots,m_i) = m_{i+1}$ gilt.

Um diese Charakterisierung benützen zu können, ist es notwendig zu wissen, wann die Forderungen, daß alle modularen Linkskongruenzen von A vertauschen, und daß alle Rechtseinsen mod $\mathrm{Ann}\,m$, m ein strikt erzeugendes Element, in einer $\mathrm{Ann}\,m$-Klasse liegen, erfüllt sind. Eine Teilantwort auf dieses Problem liefert folgender Satz:

Satz 3.5.3 *Sei A eine Ω-Halbgruppe und M ein A-Modul.*

1. *Ist M einfach und gilt in M zusätzlich für alle $\omega \in \Omega$, die Gleichung*
$$a\omega(m_1, \ldots, m_{n(\omega)}) = \omega(am_1, \ldots, am_{n(\omega)}),$$
$a \in A$, $m_1, \ldots, m_{n(\omega)} \in M$, dann sind entweder alle $a \in A$ konstante Abbildungen in M oder alle Rechtseinsen mod Ann m, *m ein strikt Erzeugendes, liegen in einer* Ann m*-Klasse.*

2. *Sei 1_l ein Linkseinselement von A bezüglich $\star$. Dann ist 1_l eine Rechtseins für alle modularen Linkskongruenzen Θ und $(e, 1_l) \in \Theta$ für alle Rechtseinsen e* mod *Θ.*

Beweis: 1. Wir definieren folgende Äquivalenzrelation auf M:
$$\Psi := \{(m, n) \in M^2 \mid am = an, \forall a \in A\}.$$
Sei $\omega \in \Omega$ eine k-stellige Operation. Dann folgt aus $m_1 \Psi m_1', \ldots, m_k \Psi m_k'$ für alle $a \in A$
$$\begin{aligned} a\omega(m_1, \ldots, m_k) &= \omega(am_1, \ldots, am_k) \\ &= \omega(am_1', \ldots, am_k') \\ &= a\omega(m_1', \ldots, m_k'). \end{aligned}$$
Weiters gilt mit $m\Psi n$ auch $am\Psi an$ für alle $a \in A$. Ψ ist somit eine Kongruenzrelation auf M. Ist $\Psi = \nabla$, dann gilt $am = an$ für alle $a \in A$, $m, n \in M$, daher sind alle $a \in A$ konstante Abbildungen. Wir betrachten nun den Fall $\Psi = \Delta$. m sei ein strikt Erzeugendes, $em = m$, und f eine Rechtseins mod $\operatorname{Ann} m$. Es gilt $afm = am$ für alle $a \in A$, und daher $fm = m$, also $(e, f) \in \operatorname{Ann} m$.

2. Sei e eine Rechtseins mod Θ. Dann gilt $(e, 1_l) = (1_l e, 1_l) \in \Theta$. Wir wählen nun ein beliebiges Element f mit $(e, f) \in \Theta$. Dann folgt aus $(ae, af) \in \Theta$ und $(a, ae) \in \Theta$ auch $(a, af) \in \Theta$. Alle Elemente in $[e]_\Theta$, speziell 1_l, sind also Rechtseinsen mod Θ. □

Definition 3.5.4 Sei A eine universelle Algebra. Ein dreistelliger Term $p(x, y, z)$ mit
$$p(x, y, y) = x \text{ und } p(x, x, y) = y$$
heißt **Mal'cev-Term**.

Bemerkung 3.5.5 Aus der universellen Algebra wissen wir, daß eine Varietät genau dann kongruenzvertauschbar ist, wenn es einen Mal'cev-Term gibt ([Ihr1], Satz 6.4.2). Da Linkskongruenzen einer Ω-Halbgruppe A genau den Kongruenzrelationen von A, aufgefaßt als A-Modul entsprechen, vertauschen in A alle Linkskongruenzen, falls es einen Mal'cev-Term gibt, der ohne die Verwendung von $\star$ gebildet werden kann.

Beispiel 3.5.6 Als erste Anwendung von Satz 3.5.1 folgern wir den Dichtesatz von Jacobson für Ringe. Für $\star$ setzen wir die gewöhnliche Ringmultiplikation. Weiters betrachten wir R-Moduln im üblichen Sinn, sodaß wir also 1. aus Satz 3.5.3 anwenden können. Sei R ein primitiver Ring und M ein einfacher, treuer R-Modul. Da für jedes $a \in R$ $a0 = 0$ gilt, ist jedes konstante a auf M die Nullabbildung. Wären alle $a \in R$ konstant, dann folgt $R = 0$ aus der Treue von M. Sei $R \neq 0$. In Ringen liegen alle Rechtseinsen von Annulatoren strikt erzeugender Elemente von M in einer Klasse (siehe Bemerkung 1.5.2). Weiters ist bekannt, daß die Kongruenzrelationen eines Moduls, daher die Linkskongruenzen eines Rings, vertauschen ($x - y + z$ ist ein Mal'cev-Term). Außerdem ist jedes $m \in M$, $m \neq 0$, ein strikt Erzeugendes. R interpoliert somit nach Bemerkung 3.5.2 genau dann nicht auf $m_1, \dots, m_n \in M \setminus \{0\}$ (d.h. $\{m_1, \dots, m_n\}$ ist abhängig nach Definition 3.4.3), wenn es ein $\phi \in \operatorname{Hom}(M^i, M)$, $1 \leq i < n$, gibt, mit $\phi(m_1, \dots, m_i) = m_{i+1}$. Wir definieren nun folgende Abbildungen

$$\phi_j : M \to M, m \mapsto \phi(0, \dots, 0, m, 0, \dots, 0), \quad j = 1, \dots, i,$$

wobei m an der j-ten Stelle steht. Man rechnet sofort nach, daß ϕ_j, $j = 1, \dots, i$, ein Endomorphismus von M ist. Mit Hilfe dieser Definition erhalten wir

$$\begin{aligned} m_{i+1} &= \phi(m_1, \dots, m_i) \\ &= \sum_{j=1}^{i} \phi_j m_j. \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt $m_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} \psi_j m_j$, $\psi_j \in \operatorname{End} M$, dann ist

$$\psi : M^i \to M, (m_1, \dots, m_i) \mapsto \sum_{j=1}^{i} \psi_j m_j$$

ein Element von $\operatorname{Hom}(M^i, M)$. Abhängigkeit bedeutet im Ringfall daher lineare Abhängigkeit.

Definition 3.5.7 Gibt es in einer Ω-Halbgruppe A eine Gruppenoperation $+ \in \Omega$, dann nennt man A eine **Kompositions-Ω-Gruppe**. A heißt **nullsymmetrisch**, falls $\omega(0, \ldots, 0) = 0$ für alle $\omega \in \Omega \cup \{\star\}$ gilt (0 bezeichnet das neutrale Element bezüglich $+$).

Beispiele für Kompositions-Ω-Gruppen sind Ringe, Fastringe und Polynomringe mit Komposition.

Satz 3.5.8 *Sei A eine nullsymmetrische Kompositions-Ω-Gruppe mit einem Linkseinselement bezüglich $\star$, M ein A-Modul und $m_1, \ldots, m_n \in M$ strikt erzeugende Elemente. Dann sind äquivalent:*

1. *$\{m_1, \ldots, m_n\}$ ist abhängig.*
2. *Es gibt ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $m_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \phi_j m_j$, $\phi_j \in \operatorname{End} M$ mit*
$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} \phi_j(\omega(n_{j,1}, \ldots, n_{j,q})) = \omega(\sum_{j=1,j\neq i}^{n} \phi_j n_{j,1}, \ldots, \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \phi_j n_{j,q}),$$
für alle $\omega \in \Omega \cup A$ (ω sei q-stellig), $n_{j,i} \in M$ beliebig.

Beweis: Da $x + y - z$ ein Mal'cev-Term in A ist und wegen der Existenz eines Linkseinselementes bezüglich $\star$, können wir Satz 3.5.1 anwenden.

1.$\Rightarrow$2.: Sei $\{m_1, \ldots, m_n\}$ abhängig. Da $m_1, \ldots, m_n$ strikt erzeugende Elemente sind, können wir $\{m_1, \ldots, m_k\}$ als unabhängig und $\{m_1, \ldots, m_{k+1}\}$ als abhängig voraussetzen, $1 \leq k < n$. Nach Satz 3.5.1 gilt also $m_{k+1} = \phi(m_1, \ldots, m_k)$, $\phi \in \operatorname{Hom}(M^k, M)$. Wir definieren wieder

$$\phi_j : M \to M, m \mapsto \phi(0, \ldots, 0, m, 0, \ldots, 0), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Sei $\omega \in \Omega$ eine q-stellige Operation. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \phi_j(\omega(n_1, \ldots, n_q)) \\
= \; & \phi(0, \ldots, 0, \omega(n_1, \ldots, n_q), 0, \ldots, 0) \\
= \; & \phi(\omega(0, \ldots, 0), \ldots, \omega(0, \ldots, 0), \omega(n_1, \ldots, n_q), \omega(0, \ldots, 0), \ldots, \omega(0, \ldots, 0)) \\
= \; & \omega(\phi(0, \ldots, 0, n_1, 0, \ldots, 0), \ldots, \phi(0, \ldots, 0, n_q, 0, \ldots, 0)) \\
= \; & \omega(\phi_j n_1, \ldots, \phi_j n_q).
\end{aligned}$$

Analog folgt $\phi_j(an) = a\phi_j n$, $a \in A$, $n \in M$. ϕ_j ist somit ein Endomorphismus von M. Weiters gilt für $\omega \in \Omega \cup A$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{k} \phi_j(\omega(n_{j,1}, \ldots, n_{j,q})) \\
= \; & \phi(\omega((n_{1,1}, \ldots, n_{k,1}), \ldots, (n_{1,q}, \ldots, n_{k,q})) \\
= \; & \omega(\phi(n_{1,1}, \ldots, n_{k,1}), \ldots, \phi(n_{1,q}, \ldots, n_{k,q})) \\
= \; & \omega(\sum_{j=1}^{k} \phi_j n_{j,1}, \ldots, \sum_{j=1}^{k} \phi_j n_{j,q}))
\end{aligned}$$

und

$$m_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \phi_j m_j \ (+ \sum_{j=k+2}^{n} 0 m_j).$$

2.$\Rightarrow$1.: O.B.d.A. sei $\{m_1, \ldots, m_n\}$ so numeriert, daß $m_n = \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j m_j$ gilt. Wir definieren

$$\phi : M^{n-1} \to M, (p_1, \ldots, p_{n-1}) \mapsto \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j p_j.$$

Mit Hilfe der Voraussetzungen läßt sich ähnlich wie im ersten Teil des Beweises nachrechnen, daß $\phi \in \mathrm{Hom}\,(M^{n-1}, M)$ gilt, woraus die Abhängigkeit von $\{m_1, \ldots, m_n\}$ folgt. $\square$

Literaturverzeichnis

[Aic1] E. Aichinger, *Local Interpolation Near-rings as a Frame-work for the Density Theorems*, Contributions to General Algebra 9 (1995), 27-36, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien - Verlag B. G. Teubner, Stuttgart

[Bet1] G. Betsch, *Primitive Near-Rings*, Math. Z. 130 (1973), 351-361

[Cli1] A. H. Clifford, G.B. Preston, *The algebraic theory of semigroups 1*, Mathematical Surveys 7, AMS (1961)

[Cli2] A. H. Clifford, G.B. Preston, *The algebraic theory of semigroups 2*, Mathematical Surveys 7, AMS (1967)

[Hoe1] H. J. Hoehnke, *Structure of semigroups*, Canad. J. Math. 18 (1966), 449-491

[Hoe2] H. J. Hoehnke, H. Seidel, *über das 0-Radikal einer Halbgruppe* (1963)

[How1] J. M. Howie, *Fundamentals of semigroup theory*, London Math. Soc. Monographs, New Series 12, Oxford Science Publications, 1995

[Ihr1] Th. Ihringer, *Allgemeine Algebra*, Teubner Studienbücher Mathematik (1993), Verlag B. G. Teubner, Stuttgart

[Jac1] N. Jacobson, *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings*, Amer. J. Math. 67 (1945), 300-320

[Jac2] N. Jacobson, *Strucutre theory of simple rings without finiteness assumptions*, Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 228-245

[Mit1] H. Mitsch, M. Petrich, *E-(0-)inversive semigroups*, preprint 1997

[Mli1] R. Mlitz, *Radicals and interpolation in universal algebra*, Radical Theory (Proc. Conf. Eger 1982), 297-331, Colloqu. Math. Soc. J. Bolyai 38, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1985

[Mli2] R. Mlitz, *Cyclic radicals in univeral algebra*, Algebra Universalis 8 (1978), 33-44

[Mli3] R. Mlitz, *On interpolation properties appearing in generalisations of Jacobson's density theorem*, Radical Theory, Proceedings of the 1988 Sendai Conference, 111-121, Uchida Rokakuha Publ. Co., Tokyo, 1989

[Mli4] R. Mlitz, *Modules and radicals of universal algebras*, Russian: Izv. Vyss. Ucebn. Zaved., Mat. 1977, No. 6, 77-85, Translation: Soviet Math. Ivz. VUZ (1977), No. 6, 61-67

[Plo1] B. I. Plotkin, *Ω-semigroups, Ω-rings and representations* (Russian), Dokl. AN SSSR 149 (1963), 1037-1040

[Oeh1] R. H. Oehmke, *On maximal congruences and finite semisimple semigroups*, Trans. Amer. Soc. 125 (1966), 223-237

[Ram1] D. Ramakotaiah, *Structure of 1-primitive near-rings*, Math. Zeitschrift 110 (1969), 15-26

[Tul1] E. J. Tully, Jr., *Representation of a semigroup by transformations acting transitively on a set*, Amer. J. Math. 83 (1961), 553-541

[Wel1] D. J. A. Welsh, *Matroid theory*, L. M. S. Monographs, Academic Press (1976)

[Whi1] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, Amer. J. Math. 57 (1935), 509-533

Lebenslauf

Ich bin chinesischer Abstammung und wurde am 9. Juli 1972 in Wien als Sohn der Klavierlehrerin Mann Cecilia Chen und des Komponisten Prof. Mauliang Chen geboren. In den Jahren 1978-1982 besuchte ich die Volksschule Friesgasse im 15. Bezirk und danach von 1982-1990 den realistischen Zweig des Bundesrealgymnasiums Marchettigasse in Wien 6. Im Juni 1990 bestand ich die Reifprüfung mit Auszeichnung.

Seither studiere ich technische Mathematik (Studienzweig Informations- und Datenverarbeitung) an der Technischen Universität Wien. Die erste Diplomprüfung legte ich im Oktober 1992 ab, die zweite im Jänner 1995, beide mit Auszeichnung. Danach begann ich unter der Betreuung von Prof. Mlitz die Arbeit an meiner Dissertation. Das Studienjahr 1995/96 verbrachte ich im Rahmen des ERASMUS-Programms an der Université Louis Pasteur in Strasbourg.

Während meiner Studienzeit inskribierte ich noch Sinologie an der Universität Wien und besuchte Französisch-Intensivkurse am Französischen Kulturinstitut, um mich auf meinen Studienaufenthalt in Frankreich vorzubereiten. Weiters arbeitete ich zweimal im Rahmen eines Firmenpraktikums beim Unternehmen SIEMENS.