Diplomarbeit

Mal'cev-Bedingungen

ausgeführt am Institut für

Algebra und Diskrete Mathematik

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dr. Hans Kaiser

durch

Gottfried Chen

Matrikelnr. 9026209

Brückeng. 10-12/1/1/4, 1060 Wien

26. Oktober 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mal'cev zeigte 1954, daß die Eigenschaft einer Varietät $\mathcal{V}$, daß in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ je zwei Kongruenzrelationen miteinander bezüglich des Relationenprodukts vertauschen, mit der Existenz eines Terms, der in allen Algebren der Varietät gewisse Gleichungen erfüllt, äquivalent ist. Eine wesentliche Voraussetzung dafür war der Begriff der freien Algebra. Im Laufe der Zeit wurden weitere Eigenschaften von Varietäten, wie z.B. Kongruendistributivität oder -modularität mit Hilfe solcher Mal'cev-Bedingungen charakterisiert. Mit der Zeit stellte sich die Frage, ob ein allgemeiner Algorithmus existiert, der zu einer gegebenen Kongruenzengleichung eine Folge von Gleichungen liefert, die zum Erfülltsein dieser Kongruenzengleichung in einer Varietät äquivalent sind. Diese Frage wurde schließlich von R. Wille positiv beantwortet.

Die meisten Sätze vom Mal'cev-Typ behandeln Eigenschaften des Kongruenzenverbandes von Algebren. Es können aber auch Eigenschaften von Varietäten mit Hilfe solcher Sätze beschrieben werden, die nicht in Form einer Kongruenzengleichung formulierbar sind.

Im Laufe der Entwicklung stellte sich auch die Frage, welche dieser Sätze auch eine lokale Charakterisierung zulassen, d.h.: welche Eigenschaften sind in einzelnen Algebren und nicht in Varietäten Mal'cev-charakterisierbar. Überraschenderweise stellte sich heraus, daß nur Arithmetizität (Kongruenzvertauschbarkeit in Verbindung mit -distributivität) sich lokal charakterisieren läßt.

Diese Arbeit versucht nun, die bekannten Ergebnisse zusammenfassend darzustellen.

Inhaltsübersicht:

1. Im ersten Abschnitt befinden sich die notwendigen Definitionen und Sätze, die später benötigt werden. Es wird weitgehend auf Beweise verzichtet und vor allem die Notation festgelegt.

2. Der Hauptteil stellt eine Zusammenfassung von Mal'cev-Typ Sätzen dar, wobei eine möglichst komplette Darstellung der wichtigsten Sätze (Konruenzdistributivität- bzw. modularität, Regularität, usw.) zu finden ist.

3. Hier wird der Wille-Algorithmus beschrieben, der es ermöglicht, aus

einer beliebigen Kongruenzengleichung, die mit $\vee, \wedge$ bzw. $\circ$ gebildet wird, einen Satz vom Mal'cev Typ zu gewinnen.

4. Zuletzt wird die Arbeit von Gumm betrachtet, die die Frage nach einer Mal'cev-Theorie für einzelne Algebren beantwortet.

1 Grundlagen

Hauptsächlich wird die Notation aus [7] verwendet. Satz 1.31 stammt aus [14].

1.1 Definitionen und Sätze aus der universellen Algebra

Definition 1.1 Ein **Typ** von Algebren ist ein geordnetes Paar $(\mathcal{F}, \sigma)$. $\mathcal{F}$ bezeichnet eine Menge von **Operationssymbolen** und $\sigma : \mathcal{F} \to \mathbf{N} \cup \{0\}$ eine Abbildung, die jedem Operationssymbol $f \in \mathcal{F}$ seine **Stelligkeit** zuordnet. Im folgenden wird nur noch $\mathcal{F}$ statt $(\mathcal{F}, \sigma)$ geschrieben.

Definition 1.2 Eine **(allgemeine) Algebra A** vom Typ $\mathcal{F}$ ist ein geordnetes Paar (A, F). A ist eine Menge und F eine Familie $F = (f_{\mathbf{A}} \mid f \in \mathcal{F})$ von $\sigma(f)$-stelligen Operationen auf $\mathbf{A}$, den sogenannten **fundamentalen Operationen**. A nennt man die **Trägermenge** von $\mathbf{A}$.

Bemerkung 1.3 Kommt es zu keinen Verwechslungen, dann wird statt $f_{\mathbf{A}}$ auch f geschrieben.

Definition 1.4 $\mathbf{A}$ sei eine Algebra vom Typ $\mathcal{F}$ und $B \subseteq A$. Gilt

$$f_{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in B \quad \forall (b_1, \ldots, b_n) \in B, \forall f \in \mathcal{F} \text{ und } \sigma(f) = n$$

dann nennt man das Paar $\mathbf{B} = (B, F)$ eine **Unteralgebra** der Algebra $\mathbf{A}$, wobei F jetzt die Einschränkung der Operationen $f_{\mathbf{A}}$ auf B bezeichnet.

Definition 1.5 Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Algebren desselben Typs. Eine Abbildung $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ heißt **Homomorphismus**, falls $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in A$, $\forall f \in \mathcal{F}$ und $\sigma(f) = n$ gilt

$$\phi f_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f_{\mathbf{B}}(\phi a_1, \ldots, \phi a_n)$$

Definition 1.6 Ein bijektiver Homomorphismus heißt **Isomorphismus**. Ein surjektiver Homomorphismus heißt **Epimorphismus** und ein Homomorphismus einer Algebra in sich heißt **Endomorphismus**.

Definition 1.7 Sei Θ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{A}$. Dann heißt Θ **Kongruenzrelation**, falls Θ mit allen fundamentalen Operationen **verträglich** ist, d.h. für $a_1\Theta b_1, \dots, a_n\Theta b_n, f \in \mathcal{F}$ gilt

$$f(a_1, \dots, a_n)\Theta f(b_1, \dots, b_n)$$

Die Menge der Kongruenzrelationen einer Algebra $\mathbf{A}$ bezeichnet man mit $Con\mathbf{A}$.

Satz 1.8 *Der Durchschnitt einer beliebigen Menge von Kongruenzrelationen ist wieder eine Kongruenzrelation.*

Definition 1.9 Auf der Menge der Kongruenzrelationen einer Algebra $\mathbf{A}$ läßt sich nun auf natürliche Weise eine Verbandsstruktur erklären, wobei $\wedge$ und $\vee$ für Kongruenzrelationen Θ und Φ folgendermaßen definiert sind:

$$\Theta \wedge \Phi := \Theta \cap \Phi$$

$$\Theta \vee \Phi := \bigcap\{\Psi \in Con\mathbf{A} \mid \Theta \cup \Phi \subseteq \Psi\}$$

Die **Diagonale** wird mit Δ und die **Allrelation** mit ∇ bezeichnet. Für die zugehörige Halbordnugsrelation wird $\leq$ oder $\subseteq$ geschrieben.

Satz 1.10 $Con\mathbf{A}$ *ist ein vollständiger Verband.*

Definition 1.11 Sei $\mathbf{A}$ eine Algebra und $\Theta, \Phi \in Con\mathbf{A}$. Dann definiert man folgendermaßen das **Relationenprodukt**:

$$(x, z) \in \Theta \circ \Phi \Leftrightarrow \exists y \in A \text{ mit } x\Theta y\Phi z$$

Satz 1.12 *Sei* $\mathbf{A}$ *eine Algebra und* $\Theta, \Phi \in Con\mathbf{A}$. *Dann gilt*

$$\Theta \vee \Phi = \Theta \cup (\Theta \circ \Phi) \cup (\Theta \circ \Phi \circ \Theta) \cup \dots$$

Definition 1.13 Sei $\mathbf{A}$ eine Algebra und $M \subseteq A$. Dann bezeichnet

$$\Theta(M) := \bigcap\{\Theta \in Con\mathbf{A} \mid (m_1, m_2) \in \Theta, \forall m_1, m_2 \in M\}$$

die kleinste Kongruenzrelation, die M als Kongruenzklasse enthält. Ist $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ endlich, schreibt man auch $\Theta(m_1, \dots, m_n)$. **Hauptkongruenzen** nennt man Kongruenzrelationen der Form $\Theta(a, b)$, $a, b \in A$. Für $M_1 \subseteq A, \dots, M_n \subseteq A$ bezeichnet man mit $\Theta(M_1; \dots; M_n) := \Theta(M_1) \vee \dots \vee \Theta(M_n)$.

Definition 1.14 Ist Θ eine Kongruenzrelation einer Algebra $\mathbf{A}$und $a \in A$, dann bezeichnet man mit $[a]\Theta$ die Klasse von a bezüglich Θ.

Definition 1.15 Da der Durchschnitt von Kongruenzrelationen wieder eine Kongruenzrelation ist, ist der Durchschnitt einer Menge von Kongruenzklassen leer oder wieder eine Kongruenzklasse. Ist daher $\mathbf{A}$ eine Algebra und $M \subseteq A$, dann kann man $[M]$ als die kleinste Kongruenzklasse definieren, die M enthält. $[M]$ ist dann Kongruenzklasse von $\Theta(M)$.

Definition 1.16 Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Algebren gleichen Typs, dann bezeichnet man mit $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ das **direkte Produkt** der beiden Algebren, wobei die Operationen komponentenweise erklärt sind. Für $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ bezeichnet man das direkte Produkt mit $\Pi_{i \in I}\mathbf{A}_i$.

Definition 1.17 Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren gleichen Typs. Man definiert folgende Operatoren H, S, P auf solchen Klassen:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{K}) &:= \text{alle homomorphen Bilder von Algebren aus } \mathcal{K}. \\ S(\mathcal{K}) &:= \text{alle Unteralgebren von Algebren aus } \mathcal{K}. \\ P(\mathcal{K}) &:= \text{alle direkten Produkte von Algebren aus } \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Definition 1.18 Die Operatoren H, S und P bilden $\mathcal{K}$ wieder auf Klassen von Algebren des selben Typs ab. Ist eine Klasse $\mathcal{V}$ unter diesen Operatoren abgeschlossen, d.h. gilt $H(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$ und dasselbe auch für S und P, dann bezeichnet man sie als **Varietät**.

1.2 Termalgebren

Definition 1.19 Sei $\mathcal{F}$ ein Typ und X eine Menge mit $X \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Die Elemente aus X nennt man **Variablen**. Rekursiv definiert man folgende Menge $T(X)$:

1. Für alle $x \in X$ gilt $(x) \in T(X)$.
2. Für $f \in \mathcal{F}$, $\sigma(f) = n$ und $t_1, \ldots, t_n \in T(X)$ gilt $(f, t_1, \ldots, t_n) \in T(X)$.

Die Elemente aus $T(X)$ nennt man **Terme** mit Variablen aus X. Statt (x) schreibt man, falls keine Verwechslungen möglich sind x und statt $(f, t_1 \ldots, t_n)$ auch $f(t_1, \ldots, t_n)$. Jedem Term kann man in eindeutiger Weise eine **Stufe** zuordnen. Dabei sind Terme erster Stufe die Elemente aus X, sowie alle nullstelligen Operationssymbole. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme $m-1$-ter Stufe und f eine n-stellige Operation, dann ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term m-ter Stufe.

Definition 1.20 Sind bei der Bildung eines Terms t die Variablen $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$ beteiligt, dann schreibt man auch $t(x_1, \ldots, x_n)$. Man nennt dann n die Stelligkeit des Terms t.

Definition 1.21 Die Menge der Terme kann man auf natürliche Weise zu einer Algebra $\mathbf{T}(X)$ vom Typ $\mathcal{F}$ machen. Man erklärt die fundamentalen Operationen auf $T(X)$ folgendermaßen:

$$f_{\mathbf{T}(X)}(t_1, \ldots, t_n) := (f, t_1, \ldots, t_n).$$

Satz 1.22 *$\mathbf{T}(X)$ sei die Termalgebra vom Typ $\mathcal{F}$ mit Variablen aus X und $\mathbf{A}$ eine beliebige Algebra vom Typ $\mathcal{F}$. Dann kann jede Abbildung $\phi : X \to A$ eindeutig zu einem Homomorphismus $\bar{\phi} : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$ fortgesetzt werden.*

Bemerkung 1.23 Der obige Homomorphismus wird auch **Einsetzungshomomorphismus** genannt.

Definition 1.24 Es sei $t \in T(x_1, \ldots, x_n)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, wobei $\mathbf{T}(x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathbf{A}$ Algebren selben Typs sind. Weiters sei $\phi : \mathbf{T} \to \mathbf{A}$ der durch $x_i \mapsto a_i$, $i = 1, \ldots, n$, eindeutig bestimmte Homomorphismus. Die durch

$$t_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) := \phi t$$

definierten n-stelligen Operationen auf A nennt man **Termfunktionen**.

Satz 1.25 *Termfunktionen vertauschen wie fundamentale Operationen mit Homomorphismen.*

Definition 1.26 Sei $\mathbf{A}$ eine Algebra vom Typ $\mathcal{F}$. Gibt man zu $\mathcal{F}$ noch alle Elemente aus A als nullstellige Operationssymbole hinzu, dann nennt man Terme vom Typ $\mathcal{F} \cup A$ **Polynome**. Die zugehörigen Termfunktionen nennt man **Polynomfunktionen**.

Bemerkung 1.27 Polynome sind daher Terme, in denen bestimmte Variablen durch feste Elemente aus A substituiert wurden. Die Anzahl der noch freien Variablen bezeichnet man als **Stelligkeit** des Polynoms.

Satz 1.28 *Die Polynomfunktionen einer Algebra* $\mathbf{A}$ *sind ebenso wie die fundamentalen Operationen mit allen Kongruenzrelationen von* $\mathbf{A}$ *verträglich.*

Satz 1.29 *Eine Äquivalenzrelation einer Algebra* $\mathbf{A}$ *ist genau dann eine Kongruenzrelation, wenn sie mit allen einstelligen Polynomfunktionen von* $\mathbf{A}$ *veträglich ist.*

Beweis: Nach obigem Satz ist jede Kongruenzrelation mit allen einstelligen Polynomfunktionen verträglich. Erfüllt umgekehrt eine Äquivalenzrelation Θ diese Bedingung, dann auch speziell für alle Polynomfunktionen der Form $p(x) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, wobei f eine fundamentale Operation mit $\sigma(f) = n$ ist. Gelte $a_1 \Theta a_1', \ldots, a_n \Theta a_n'$, daher:

$$\begin{array}{rcl} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) & \Theta & f(a_1', a_2, a_3, \ldots, a_n) \\ & \Theta & f(a_1', a_2', a_3, \ldots, a_n) \\ & \vdots & \\ & \Theta & f(a_1', \ldots, a_n'). \end{array}$$

Aus der Transitivität von Θ folgt $\Theta \in Con\mathbf{A}$. $\square$

Mit Hilfe dieser Begriffe läßt sich nun $\Theta(M_1, \ldots, M_n)$ charakterisieren. Dazu wird noch folgende Schreibweise benötigt:

Definition 1.30 Sei P eine Menge von Abbildungen einer Menge A in sich, und sind $M_1, \ldots, M_n$ Teilmengen von A und $a, b \in A$, dann schreibt man

$$a \equiv b(\text{mod } M_1, \ldots, M_n; P),$$

wenn Abbildungen $p_0, \ldots, p_m \in P$ und Indizes $1 \leq i_l \leq n$, $l = 0, \ldots, m$ existieren, mit $a \in p_0 M_{i_0}$, $b \in p_m M_{i_m}$ und $p_k M_{i_k} \cap p_{k+1} M_{i_{k+1}} \neq \emptyset$, $k = 0, \ldots, m-1$.

Satz 1.31 *Bezeichne* $\hat{P}(\mathbf{A})$ *die Menge aller einstelligen Polynome einer Algebra* $\mathbf{A}$. *Sei* $a, b \in A$ *und* $M_1, \ldots, M_n \subseteq A$. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $(a, b) \in \Theta(M_1; \ldots; M_n)$.

(ii) $a \equiv b(\text{mod } M_1, \ldots, M_n; \hat{P})$.

Beweis: Gelte $a \equiv b(\mathrm{mod}\ M_1, \dots, M_n; \hat{P})$. Es gibt also Polynome $p_0, \dots, p_m$ und geeignete Indizes i_l, $l = 0, \dots, m$, sodaß $a \in p_0 M_{i_0}$, $b \in p_m M_{i_m}$ und $p_k M_{i_k} \cap p_{k+1} M_{i_{k+1}} \neq \emptyset$, $k = 0, \dots, m-1$ gilt. Bezeichne c_k ein beliebiges Element aus $p_k M_{i_k} \cap p_{k+1} M_{i_{k+1}}$. Dann gilt $(a, c_0) \in \Theta(M_{i_0})$, $(c_j, c_{j+1}) \in \Theta(M_{i_{j+1}})$, $j = 0, \dots, m-2$, und $(c_{m-1}, b) \in \Theta(M_{i_m})$, daher $(a, b) \in \Theta(M_1; \dots; M_n)$. Sei Φ die Menge aller Paare $(a, b) \in A \times A$ mit $a \equiv b(\mathrm{mod}\ M_1, \dots, M_n; \hat{P})$, dann gilt also $\Phi \subseteq \Theta(M_1; \dots; M_n)$. Da $M_k \times M_k \subseteq \Phi$, $k = 1, \dots, n$, gilt, muß nur noch gezeigt werden, daß Φ eine Kongruenzrelation von $\mathbf{A}$ ist, da $\Theta(M_1; \dots; M_n)$ die kleinste Kongruenzrelation mit dieser Eigenschaft ist. Φ ist reflexiv, symmmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation. Sei $(a, b) \in \Phi$ und p eine einstellige Polynomfunktion auf $\mathbf{A}$. Dann gilt $p(a) \in (p \circ p_0) M_{i_0}$, $p(b) \in (p \circ p_m) M_{i_m}$ und $(p \circ p_k) M_{i_k} \cap (p \circ p_{k+1}) M_{i_{k+1}} \neq \emptyset$, $k = 0, \dots, m-1$. Da $q_i := p \circ p_i$ wieder eine einstellige Polynomfunktion ist, folgt daher $(p(a), p(b)) \in \Phi$ und mit Hilfe von Satz 1.29 $\Phi \in Con\mathbf{A}$. □

In Abschnitt 2.6 wird folgende Charakterisierung von Hauptkongruenzen benötigt:

Lemma 1.32 *Seien $a, b, c_0, c_1 \in A$. Dann gilt $(a, b) \in \Theta(c_0, c_1)$ genau dann, wenn für $m \geq 1$, $n \geq 0$ $(m+1)$-stellige Termfunktionen $p_0, \dots, p_n$, Elemente z_{ij} aus A, $i = 0, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, und natürliche Zahlen $k(0), \dots, k(n)$ existieren, mit:*

$$k(i) = 0 \text{ oder } 1, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$a = p_0(c_{k(0)}, z_{01}, \dots, z_{0m}), \quad b = p_n(c_{1-k(n)}, z_{n1}, \dots, z_{nm}),$$

$$p_j(c_{1-k(j)}, z_{j1}, \dots, z_{jm}) = p_{j+1}(c_{k(j+1)}, z_{j+1,1} \dots, z_{j+1,m}), \quad j = 0 \dots, n-1.$$

Beweis: Sind die obigen Gleichungen erfüllt, dann folgt mit Satz 1.31 $(a, b) \in \Theta(c_0, c_1)$, da $p_i(x, z_{i1}, \dots, z_{im})$ eine einstellige Polynomfunktion ist.

Sei umgekehrt $(a, b) \in \Theta(c_0, c_1)$. Dann existieren nach Satz 1.31 einstellige Polynomfunktionen $p_0, \dots, p_n$ mit $a \in p_0(c_0, c_1)$, $b \in p_n(c_0, c_1)$, $p_i(c_0, c_1) \cap p_{i+1}(c_0, c_1) \neq \emptyset$. Es gibt also $k(i) = 0$ oder 1 und $l(i) = 0$ oder 1, $i = 0, \dots, n$, mit:

$$\begin{aligned} a = p_0(c_{k(0)}) \quad &, \quad p_0(c_{l(0)}) = p_1(c_{k(1)}), \\ p_1(c_{l(1)}) = p_2(c_{k(2)}) \quad &, \quad p_2(c_{l(2)}) = p_3(c_{k(3)}), \\ &\vdots \\ p_{n-1}(c_{l(n-1)}) = p_n(c_{k(n)}) \quad &, \quad p_n(c_{l(n)}) = b. \end{aligned}$$

Für $k(i)$ und $l(i)$ sind zwei Fälle möglich. Gilt $k(i) \neq l(i)$, daher $l(i) = 1 - k(i)$, dann erhält man die Gleichung

$$p_i(c_{1-k(i)}) = p_{i+1}(c_{k(i)}).$$

Ist $k(i) = l(i)$, dann fügt man in die Gleichungskette $q_i := p_i$ mit $k_q(i) := 1 - k(i)$ und $m_q(i) := m(i)$ ein. Dann gilt:

$$p_i(c_{1-k(i)}) = q_i(c_{k_q(i)}), \quad q_i(c_{1-k_q(i)}) = p_{i+1}(c_{k(i+1)}).$$

Die Polynomfunktionen dieser neuen Folge werden zu $p'_0, \ldots, p'_{n'}$ mit zugehörigen Zahlen $k'(i)$ umbenannt. Jede einstellige Polynomfunktion ist eine Termfunktion, in der bis auf eine freie Variable alle anderen durch Elemente der Algebra substituiert wurden. Da jeder i-stellige Term auch als j-stelliger Term, $j \geq i$, aufgefaßt werden kann, können o.B.d.A. alle Termfunktionen, aus denen die p'_i gebildet sind $m+1$-stellig, $m \geq 1$, gewählt werden. Diese erfüllen dann die gewünschten Gleichungen, wobei die z_{ij} die substituierten Elemente sind. □

1.3 Freie Algebren

Definition 1.33 Sei $T(X)$ die Menge aller Terme vom Typ $\mathcal{F}$. Ein Paar $(s,t) \in T(X) \times T(X)$ heißt **Gleichung** über X (man schreibt $s = t$). In einer Algebra $\mathbf{A}$ vom Typ $\mathcal{F}$ **gilt** die Gleichung $s(x_1, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_n)$, wenn für jede Belegung $a_1, \ldots, a_n \in A$ $s_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = t_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ richtig ist. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren gleichen Typs, dann bezeichnet man mit $G_X(\mathcal{K})$ die Menge aller Gleichungen über X, die in allen Algebren aus $\mathcal{K}$ gültig sind.

Satz 1.34 *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren gleichen Typs, X eine Variablenmenge und $\mathbf{T}(X)$ die zugehörige Termalgebra. Dann gilt:*

$$G_X(\mathcal{K}) = \bigcap \{\ker \phi \mid \phi : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}, \mathbf{A} \in \mathcal{K}\}$$

und daher $G_X(\mathcal{K}) \in Con\mathbf{T}(X)$.

Definition 1.35 Die Faktoralgebra $\mathbf{T}(X)/G_X(\mathcal{K})$ heißt die von X **frei erzeugte** Algebra und wird mit $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(X)$ bezeichnet. Ist klar, welche Klasse $\mathcal{K}$ gemeint ist, schreibt man auch $\mathbf{F}(X)$. Man definiert $\bar{x} := [x](G_X(\mathcal{K}))$ und $\bar{X} := \{\bar{x} \mid x \in X\}$. Zur Vereinfachung wird auch x statt $\bar{x}$ geschrieben.

Satz 1.36 *Sei* $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(X)$ *die frei erzeugte Algebra vom Typ* $\mathcal{F}$ *bezüglich einer Klasse* $\mathcal{K}$ *und* $\mathbf{A}$ *eine Algebra aus* $\mathcal{K}$*. Dann kann jede Abbildung* $\phi : \bar{X} \to A$ *eindeutig zu einem Homomorphismus* $\bar{\phi} : \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(X) \to \mathbf{A}$ *fortgesetzt werden.*

Satz 1.37 *Sei* $\mathcal{V}$ *eine Varietät und* X *eine beliebige Variablenmenge, dann gilt* $\mathbf{F}(X) \in \mathcal{V}$.

Aus der Definition von $G_X(\mathcal{K})$ folgt sofort:

Satz 1.38 *Sei* $\mathcal{K}$ *eine Klasse Algebren gleichen Typs. Sind* $s, t \in T(X)$ *und* $\bar{s}, \bar{t}$ *die zugehörigen Elemente in* $\mathbf{F}(X)$ *und gilt* $\bar{s} = \bar{t}$*, dann ist die Gleichung* $s = t$ *in allen Algebren aus* $\mathcal{K}$ *gültig.*

2 Hauptteil

2.1 Kongruenzvertauschbarkeit

Der Satz von Mal'cev [9] charakterisiert kongruenzvertauschbare Varietäten und war der Ausgangspunkt für die Entwicklung der gesamten Theorie.

Definition 2.1 Eine Algebra $\mathbf{A}$ heißt **kongruenzvertauschbar**, falls $\forall \Theta, \Phi \in Con\mathbf{A} \quad \Theta \circ \Phi = \Phi \circ \Theta$ gilt. Eine Varietät $\mathcal{V}$ heißt **kongruenzvertauschbar**, falls alle $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ kongruenzvertauschbar sind.

Folgendes Lemma ermöglicht aus der Kongruenz von Elementen einer freien Algebra aus $\mathcal{V}$ die Gültigkeit eines Systems von Gleichungen herzuleiten und ist ein wichtiger Schritt im Beweis der folgenden Sätze.

Lemma 2.2 *Gegeben seien eine Varietät $\mathcal{V}$ und Terme $s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ und $t(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. In $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ gilt genau dann*

$$s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), t(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \Theta(y_1, \ldots, y_m),$$

wenn in allen Algebren aus $\mathcal{V}$

$$s(x_1, \ldots, x_n, y, \ldots, y) = t(x_1, \ldots, x_n, y, \ldots, y)$$

gilt.

Beweis: Gelte $s, t \in \Theta(y_1, \ldots, y_m)$. Wir definieren einen Homomorphismus $\phi : \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \to \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n, y)$ durch $\phi x_i := x_i, i = 1, \ldots, n$ und $\phi y_j := y, j = 1, \ldots, m$. Es gilt also $\Theta(y_1, \ldots, y_m) \subseteq \ker \phi$. Damit gilt in $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n, y)$:

$$\begin{aligned} s(x_1, \ldots, x_n, y, \ldots, y) &= \phi s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \\ = \phi t(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= t(x_1, \ldots, x_n, y, \ldots, y). \end{aligned}$$

Sei nun die Gleichung $s(x_1, \ldots, x_n, y, \ldots, y) = t(x_1, \ldots, x_n, y, \ldots, y)$ in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ erfüllt. Dann gilt in $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$:

$$\begin{aligned} &s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \Theta(y_1, \ldots, y_m) s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_1) \\ &= t(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_1) \Theta(y_1, \ldots, y_m) t(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.3 *Eine Varietät $\mathcal{V}$ ist genau dann kongruenzvertauschbar, wenn es einen 3-stelligen Term p gibt, sodaß in allen Algebren aus $\mathcal{V}$*

$$p(x, y, y) = x \quad \textit{und} \quad p(x, x, y) = y$$

gilt.

Beweis: $\mathcal{V}$ sei kongruenzvertauschbar und $\mathbf{F}$ die von $\{x, y, z\}$ frei erzeugte Algebra. Es gilt $(x, z) \in \Theta(x, y) \circ \Theta(y, z)$. Da $\mathcal{V}$ kongruenzvertauschbar ist, gilt auch $(x, z) \in \Theta(y, z) \circ \Theta(x, y)$. Es gibt also ein $p(x, y, z) \in \mathbf{F}$, sodaß $x\Theta(y, z)p(x, y, z)\Theta(x, y)z$ gilt. Mit Hilfe von Lemma 2.2 ist die Gültigkeit der Gleichungen gezeigt.

Sei jetzt in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ die Gültigkeit der zwei Gleichungen vorausgesetzt. Es gelte $a\Theta b\Phi c$ in einer Algebra $\mathbf{A}$. Dann folgt $a = p(a, b, b)\Phi p(a, b, c)\Theta p(b, b, c) = c$. Daher ist $\mathcal{V}$ kongruenzvertauschbar. □

Definition 2.4 Den Term p aus Satz 2.3 nennt man **Mal'cev-Term**.

Beispiel 2.5 Ein Beispiel für einen Mal'cev-Term ist $xy^{-1}z$ in der Varietät der Gruppen. Daher sind Gruppen und auch alle Algebren, die bei Weglassen einiger Operationen eine Gruppe bilden (z. B. : Vetorräume, Ringe,. . .) kongruenzvertauschbar.

2.2 Arithmetizität

Arithmetische Varietäten wurden von A. F. Pixley in [10] charakterisiert, wobei sich herausstellt, daß sich Arithmetizität (=Kongruenzvertauschbarkeit und -distributivität) einfacher charakterisieren läßt, als Kongruenzdistributivität alleine.

Definition 2.6 Eine Algebra $\mathbf{A}$ heißt **kongruenzdistributiv**, wenn $Con\mathbf{A}$ ein distributiver Verband ist. Eine Varietät $\mathcal{V}$ heißt **kongruenzdistributiv**, wenn alle $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ kongruenzdistributiv sind.

Definition 2.7 Eine Algebra bzw. eine Varietät heißt **arithmetisch**, falls sie kongruenzvertauschbar und kongruenzdistributiv ist.

Bemerkung 2.8 Eine Algebra ist genau dann arithmetisch, wenn in $Con\mathbf{A}$

$$(x \circ y) \wedge (z \circ x) = x \circ (y \wedge z)$$

erfüllt ist.

Folgender Satz liefert nur eine *hinreichende* Bedingung dafür, daß eine Varietät kongruenzdistributiv ist und ist daher keine Mal'cev-Bedingung.

Satz 2.9 *Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät und m ein 3-stelliger Term, sodaß in allen Algebren aus $\mathcal{V}$*

$$m(x, x, y) = m(x, y, x) = m(y, x, x) = x$$

gilt. Dann ist $\mathcal{V}$ kongruenzdistributiv.

Beweis: Sei $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ $\Theta, \Phi, \Psi \in Con\mathbf{A}$, und $(a, b) \in \Theta \wedge (\Phi \vee \Psi)$. Daher $(a, b) \in \Theta$ und $(a, b) \in (\Phi \vee \Psi)$. Es gibt also Elemente $c_1, \ldots, c_n \in A$ mit $a\Phi c_1 \Psi c_2 \Phi \ldots \Phi c_n \Psi b$. Weiters gilt $m(a, d, b)\Theta m(a, d, a) = a \quad \forall d \in A$. Daher folgt

$$a = m(a, a, b)(\Theta \wedge \Phi)m(a, c_1, b)(\Theta \wedge \Psi)m(a, c_2, b)$$
$$(\Theta \wedge \Phi) \ldots (\Theta \wedge \Phi)m(a, c_n, b)(\Theta \wedge \Psi)m(a, b, b) = b$$

Damit gilt $(a, b) \in (\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)$, also $\Theta \wedge (\Phi \vee \Psi) \subseteq (\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)$. Da die umgekehrte Inklusion immer gültig ist, ist $\mathbf{A}$ kongruenzdistributiv. (Von den beiden Distributivgesetzen muß nur eines gezeigt werden, da das Zweite bekanntlich zum ersten äquivalent ist.) $\square$

Definition 2.10 Einen Term m der die obige Gleichung erfüllt nennt man **Majoritätsterm**.

Beispiel 2.11 Ein Majoritätsterm für Verbände ist $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

Satz 2.12 *Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathcal{V}$ ist arithmetisch*

(ii) *es gibt einen Mal'cev-Term und einen Majoritätsterm*

(iii) *es gibt einen 3-stelligen Term q, sodaß in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ gilt:*

$$q(x,y,y) = q(x,y,x) = q(y,y,x) = x \tag{1}$$

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Da $\mathcal{V}$ arithmetisch und daher kongruenzvertauschbar ist, gibt es einen Mal'cev-Term p. Zu zeigen ist noch, daß es auch einen Majoritätsterm m gibt. Aus der Arithmetizität von $\mathcal{V}$ folgt, daß in $\mathbf{F}$(x,y,z)

$$\begin{aligned}
(x,z) &\in \Theta(x,z) \wedge (\Theta(x,y) \vee \Theta(y,z)) \\
&= (\Theta(x,z) \wedge \Theta(x,y)) \vee (\Theta(x,z) \wedge \Theta(y,z)) \\
&= (\Theta(x,z) \wedge \Theta(x,y)) \circ (\Theta(x,z) \wedge \Theta(y,z))
\end{aligned}$$

gilt, wobei das zweite Gleichheitszeichen aus Satz 1.12 folgt. Es gibt daher einen Term $m(x,y,z)$ mit

$$x(\Theta(x,z) \wedge \Theta(x,y))m(x,y,z)(\Theta(x,y) \wedge \Theta(y,z))z.$$

Mit Hilfe von Lemma 2.2 folgt, daß m ein Majoritätsterm ist.

$(ii) \Rightarrow (i)$: folgt aus den Sätzen 2.3 und 2.9.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Definiert man $q(x,y,z) := p(x, m(x,y,z), z)$ dann erhält man

$$\begin{aligned}
q(x,y,y) &= p(x, m(x,y,y), y) = p(x,y,y) = x, \\
q(x,y,x) &= p(x, m(x,y,x), x) = p(x,x,x) = x, \\
q(y,y,x) &= p(y, m(y,y,x), x) = p(y,y,x) = x.
\end{aligned}$$

Der Term q erfüllt also (1).

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Durch Einsetzen erhält man wie oben, daß q ein Mal'cev-Term und $m(x,y,z) := q(x, q(x,y,z), z)$ ein Majoritätsterm ist. □

Definition 2.13 Der Term q wird **Pixley-Term** genannt.

Beispiel 2.14 $(x \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge t)$ ist ein Pixley-Term für Boolesche Algebren, wobei $'$ die Kommplementbildung bezeichnet.

2.3 Kongruenzdistributivität

Der folgende Satz stammt von B. Jónsson [8] und charakterisiert kongruenzdistributive Varietäten.

Satz 2.15 *Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät. Dann ist $\mathcal{V}$ genau dann kongruenzdistributiv, wenn es für ein $n \in \mathbf{N}$ 3-stellige Terme $d_0, \ldots, d_n$ gibt, sodaß für $i = 0, \ldots, n-1$ in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ folgende Gleichungen erfüllt sind:*

$$\begin{array}{rcll} d_0(x,y,z) & = & x, & \\ d_i(x,y,x) & = & x, & \\ d_i(x,x,y) & = & d_{i+1}(x,x,y), & (i \textit{ gerade}) \\ d_i(x,y,y) & = & d_{i+1}(x,y,y), & (i \textit{ ungerade}) \\ d_n(x,y,z) & = & z. & \end{array}$$

Beweis: Sei $\mathcal{V}$ kongruenzdistributiv. Dann gilt in $\mathbf{F}(x,y,z)$:

$$(x,z) \in (\Theta(x,z) \wedge \Theta(x,y)) \vee (\Theta(x,z) \wedge \Theta(y,z))$$

(siehe Satz 2.12). Es gibt also eine natürliche Zahl n und Terme $d_1, \ldots, d_{n-1}$ mit

$$\begin{array}{rcl} x =: d_0(x,y,z) & \Theta(x,z) \wedge \Theta(x,y) & d_1(x,y,z), \\ d_1(x,y,z) & \Theta(x,z) \wedge \Theta(y,z) & d_2(x,y,z), \\ & \vdots & \\ d_{n-1}(x,y,z) & \Theta(x,z) \wedge \Theta(y,z) & d_n(x,y,z) := z \end{array}$$

(o.B.d.A. steht immer $\Theta(x,z) \wedge \Theta(y,z)$ am Ende der Gleichungskette, da der letzte Term wiederholt werden kann). Mit Hilfe von Lemma 2.2 erhält man, daß die Terme d_i, $i = 0, \ldots, n$, die gewünschten Gleichungen erfüllen.

Sei nun vorausgesetzt, daß die obigen Gleichungen für ein $n \in \mathbf{N}$ in allen $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ erfüllt sind. Um zu zeigen, daß für eine Algebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ $Con\mathbf{A}$ distributiv ist genügt es wie in Satz 2.9

$$\Theta \wedge (\Phi \vee \Psi) \subseteq (\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)$$

zu zeigen, $\Theta, \Phi, \Psi \in Con\mathbf{A}$. Bezeichne $\alpha_k := \Phi \circ \Psi \circ \Phi \circ \ldots$ (k Faktoren). Dann gilt nach Satz 1.12:

$$\Theta \wedge (\Phi \vee \Psi) = \Theta \wedge (\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \ldots) = (\Theta \wedge \alpha_1) \cup (\Theta \wedge \alpha_2) \cup \ldots.$$

Es genügt daher für alle $k \in \mathbf{N}$

$$\Theta \wedge \alpha_k \subseteq (\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi) \tag{2}$$

zu zeigen.

Der Beweis von (2) erfolgt mit vollständiger Induktion. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Gelte (2) also für α_k. Es gilt $\alpha_{k+1} = \alpha_k \circ \beta$ wobei β entweder gleich Φ oder Ψ ist. Sei $(a, c) \in (\Theta \wedge \alpha_{k+1})$. Daher $a\Theta c$ und $\exists b \in A$ mit $a\alpha_k b\beta c$. Setzt man $t_i := d_i(a, b, c)$, $i = 0, \ldots, n$, dann gilt für alle i:

$$t_i = d_i(a, b, c)\Theta d_i(a, b, a) = a \tag{3}$$

dh.: $t_i \Theta t_{i+1}$, $i < n$. Für gerade i gilt, da α_k als Produkt von Kongruenzrelationen ebenfalls mit Termfunktionen verträglich ist:

$$t_i = d_i(a, b, c)\alpha_k d_i(b, b, c) = d_{i+1}(b, b, c)\alpha_k t_{i+1}.$$

Zusammen mit (3) erhält man $t_i(\Theta \wedge \alpha_k)t_{i+1}$ und mit Hilfe der Induktionsannahme $t_i(\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)t_{i+1}$ (i gerade). Für ungerade i gilt:

$$t_i = d_i(a, b, c)\beta d_i(a, b, b) = d_{i+1}(a, b, b)\beta t_{i+1}$$

und wegen (3) $t_i(\Theta \wedge \beta)t_{i+1}$. Da $\beta \in \{\Phi, \Psi\}$ gilt, folgt also $t_i(\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)t_{i+1}$. Insgesamt folgt:

$$a = t_0(\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)t_1(\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi) \ldots (\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)t_n = c,$$

also $(a, c) \in (\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)$. Damit ist (2) gezeigt. □

Definition 2.16 Die Terme aus Satz 2.15 nennt man **Jónsson-Terme**.

Beispiel 2.17 Die Varietät der Verbände erfüllt die Gleichungen aus Satz 2.15 für $n = 2$, wenn man als Term $d_1(x, y, z)$ den Majoritätsterm aus Beispiel 2.11 nimmt.

Beispiel 2.18 Erfüllt eine Varietät die Gleichungen aus Satz 2.15 für $n = 3$, dann impliziert dies nicht, daß sie auch für $n = 2$ erfüllt sein müssen. Dazu betrachten wir Algebren vom Typ $(3, 3)$, wobei d_1 und d_2 die zugehörigen Operationssymbole sind. $\mathcal{V}$ sei die Klasse aller Algebren dieses Typs, die folgendes System von Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} d_1(x, y, x) = d_2(x, y, x) = x, \\ d_1(x, x, y) = d_2(y, y, x) = x, \end{aligned} \tag{4}$$

$$d_1(x,y,y) = d_2(x,y,y)$$

Damit auch für $n = 2$ Jónsson-Terme existieren, muß es also einen Term $s(x,y,z)$ geben, der

$$s(x,x,y) = x, \quad s(x,y,x) = x, \quad s(x,y,y) = y \tag{5}$$

erfüllt. Es gilt folgende Aussage: Sei $\mathbf{F}$ frei erzeugte Algebra in $\mathcal{V}$ mit erzeugender Menge U. Dann gilt für alle $u \in U$ und $a, b, c \in \mathbf{F}$

$$d_1(a,b,c) = u \Rightarrow a = u, \quad d_2(a,b,c) = u \Rightarrow c = u, \tag{6}$$

da für $e(x,y,z) \not\approx f(x,y,z)$ und $e(x,y,z) \not\approx g(x,y,z)$ (wobei $\not\approx$ bedeutet, daß der linke Term nicht durch Anwendung der Gleichungen (4) in den rechten übergeführt werden kann) ein Term der Form $d_1(e(x,y,z), f(x,y,z), g(x,y,z))$ nicht mit Hilfe einer der Gleichungen (4) mit einem Term niedrigerer Stufe gleichgesetzt werden kann. Es muß daher entweder $a = b$ oder $a = c$, auf jeden Fall aber $a = u$ gelten (einen exakten Beweis von (6) erhält man mit Induktion nach dem Termaufbau). Analog argumentiert man für d_2.

Angenommen es gäbe einen Term $s(x,y,z)$, sodaß (5) erfüllt ist, dann kann s keiner der Terme x, y, z sein und muß daher von der Form $d_i(s_1(x,y,z), s_2(x,y,z), s_3(x,y,z))$, $i \in \{1,2\}$ sein. Betrachtet man jetzt $\mathbf{F}(x,y,z)$, und verwendet man die Tatsache, daß (5) und (6) gelten müssen, dann erhält man, daß schon s_1 für $i = 1$ bzw. s_2 für $i = 2$ (5) erfüllt. Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß man o.B.d.A. s als Term mit niedrigster Stufe, der (5) erfüllt, voraussetzen kann.

2.4 Modularität

Die Ergebnisse dieses Abschnitts beinhalten die Charakterisierung der Kongruenzmodularität von A. Day [1] und einige Folgerungen daraus.

Definition 2.19 Ein Verband $\mathbf{V}$ heißt **modular**, wenn $\forall x, y, z \in V$ folgendes **modulare Gesetz** gilt:

$$x \leq z \Rightarrow (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

(eigentlich nur $\leq$, da $\geq$ immer gilt) bzw. äquivalent dazu:

$$x \wedge (y \vee (x \wedge z)) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Bemerkung 2.20 Man sieht sofort, daß jeder distributive Verband auch modular ist. Es stellt sich auch heraus, daß, falls die Mal'cev-Bedingung für Kongruenzdistributivität erfüllt ist, man daß Erfülltsein der Mal'cev-Bedingung für Modularität folgern kann, wobei im Beweis nicht der Begriff der Varietät gebraucht wird.

Definition 2.21 Eine Algebra heißt **kongruenzmodular**, wenn $Con\mathbf{A}$ modular ist. Eine Varietät heißt **kongruenzmodular**, wenn alle in ihr enthaltenen Algebren kongruenzmodular sind.

Satz 2.22 *Eine Varietät $\mathcal{V}$ ist genau dann kongruenzmodular, wenn es für ein $n \in \mathbf{N}$ 4-stellige Terme $m_0, \ldots, m_n$ gibt, sodaß für $i = 0, \ldots, n-1$ in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ folgende Gleichungen erfüllt sind:*

$$\begin{array}{rcll} m_0(a,b,c,d) & = & a, & \\ m_i(a,b,b,a) & = & a, & \\ m_i(a,b,b,d) & = & m_{i+1}(a,b,b,d), & (i \text{ ungerade}) \\ m_i(a,a,d,d) & = & m_{i+1}(a,a,d,d). & (i \text{ gerade}) \end{array}$$

Beweis: Sei $\mathcal{V}$ kongruenzmodular. Setzt man in $\mathbf{F}(a,b,c,d)$

$$\Theta := \Theta(b,c), \quad \Psi := \Theta(a,b) \vee \Theta(c,d), \quad \Phi := \Theta(a,d) \vee \Theta(b,c),$$

dann erhält man aus der Modularität von $Con\mathbf{F}$:

$$(a,d) \in \Phi \wedge (\Psi \vee (\Phi \wedge \Theta)) = (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta).$$

Es gibt also (vgl. Satz 2.15) eine natürliche Zahl n und Terme $m_0, \ldots, m_n$ mit:

$$\begin{array}{rcl} a =: m_0(a,b,c,d) & (\Phi \wedge \Psi) & m_1(a,b,c,d), \\ m_1(a,b,c,d) & (\Phi \wedge \Theta) & m_2(a,b,c,d), \\ & \vdots & \\ m_{n-1}(a,b,c,d) & (\Phi \wedge \Theta) & m_n(a,b,c,d) := d \end{array}$$

Aus Lemma 2.2 folgt wieder, daß die Terme m_i, $i = 0, \ldots, n$, die gewünschten Gleichungen erfüllen.

Nun sei die Existenz der Terme m_i, $i = 0, \ldots, n$, die die obigen Gleichungen erfüllen vorausgesetzt. Θ, Φ und Ψ seien Kongruenzrelationen einer Algebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ mit $\Theta \leq \Phi$. Zu zeigen ist:

$$(\Theta \vee \Psi) \wedge \Phi \leq \Theta \vee (\Psi \wedge \Phi).$$

Für $k \in \mathbf{N}$ sei $\alpha_k := \Psi \circ \Theta \circ \Psi \circ \ldots \circ \Theta \circ \Psi$, wobei rechts $(2k+1)$ Faktoren stehen. Da $\Phi \wedge (\Theta \vee \Psi) = (\Phi \wedge \alpha_0) \circ (\Phi \wedge \alpha_1) \circ \ldots$ gilt, genügt es für alle $k \in \mathbf{N}$

$$\Phi \wedge \alpha_k \leq \Theta \vee (\Psi \wedge \Phi)$$

zu zeigen. Diese Aussage wird mit vollständiger Induktion bewiesen.

Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage schon für k gezeigt. Aus $(a, d) \in \Phi \wedge \alpha_{k+1} = \Phi \wedge (\alpha_k \circ \Psi \circ \Theta)$, $(a, d \in A)$ folgt, daß es Elemente b und c aus A gibt, mit:

$$a \Phi d, \quad a \alpha_k b \Theta c \Psi d.$$

Aus $\Theta \leq \Phi$ und $\Psi \leq \alpha_k$ folgt weiters

$$b \Phi c, \text{ und } c \alpha_k d.$$

Setzt man $u_i := m_i(a, b, c, d)$, $i = 0, \ldots, n$, dann erhält man $a = u_0$ und $d = u_n$. Für alle i gilt:

$$u_i \Phi m_i(a, b, b, a) = a = m_i(a, a, a, a) \Phi m_i(a, a, d, d). \tag{7}$$

Für ungerade i folgt:

$$u_i = m_i(a, b, c, d) \Theta m_i(a, b, b, d) = m_{i+1}(a, b, b, d) \Theta u_{i+1}. \tag{8}$$

Für gerade i folgt:

$$u_i \alpha_k m_i(a, a, d, d) = m_{i+1}(a, a, d, d) \alpha_k u_{i+1}.$$

Zusammen mit (7) erhält man für gerade i:

$$u_i (\Phi \wedge \alpha_k) m_i(a, a, d, d) = m_{i+1}(a, a, d, d) (\Phi \wedge \alpha_k) u_{i+1}.$$

Laut Induktionsannahme gilt $\Phi \wedge \alpha_k \leq \Theta \vee (\Psi \wedge \Phi)$, daher

$$u_i (\Theta \vee (\Psi \wedge \Phi)) u_{i+1}, \quad (i \text{ gerade}).$$

Mit (8) ergibt das insgesamt (o.B.d.A. sei n gerade):

$$\begin{array}{rcl} a = u_0 & (\Theta \vee (\Psi \wedge \Phi)) & u_1, \\ u_1 & \Theta & u_2 \\ & \vdots & \\ u_{n-1} & \Theta & u_n = d, \end{array}$$

daher $(a,d) \in \Theta \vee (\Theta \vee (\Psi \wedge \Phi)) = \Theta \vee (\Psi \wedge \Phi)$. □

Die Tatsache, daß kongruenzvertauschbare Varietäten auch modular sind, kann jetzt mit Hilfe der Mal'cev-Charakterisierungen dieser beiden Eigenschaften gezeigt werden.

Bemerkung 2.23 Daß Vertauschbarkeit Modularität impliziert, gilt sogar in einzelnen Algebren. Das läßt sich aber nicht mit Hilfe der Mal'cev-Sätze zeigen, da z.B. nicht gelten muß, daß eine kongruenzvertauschbare Algebra auch eine Mal'cev-Funktion besitzt.

Satz 2.24 *Eine Varietät $\mathcal{V}$ ist genau dann kongruenzvertauschbar, wenn die Gleichungen aus Satz 2.22 für $n = 2$ erfüllt sind.*

Beweis: Sei $\mathcal{V}$ kongruenzvertauschbar und p der zugehörige Mal'cev-Term. Mit

$$\begin{array}{rcl} m_0(a,b,c,d) & := & a, \\ m_1(a,b,c,d) & := & p(a, p(a,b,c), d), \\ m_2(a,b,c,d) & := & d \end{array}$$

gilt

$$m_1(a,b,b,a) = p(a, p(a,b,b), a) = p(a,a,a) = a,$$
$$m_1(a,b,b,d) = p(a, p(a,b,b), d) = p(a,a,d) = d = m_2(a,b,b,d),$$
$$m_0(a,a,b,b) = a = p(a,b,b) = p(a, p(a,a,b), b) = m_1(a,a,b,b).$$

Daher ist jede kongruenzvertauschbare Varietät auch kongruenzmodular.

Seien jetzt die Gleichungen aus Satz 2.22 für $n = 2$ erfüllt. Setzt man $p(a,b,c) := m_1(c,c,b,a)$, dann folgt:

$$p(a,a,b) = m_1(b,b,a,a) = m_0(b,b,a,a) = b,$$

$$p(a,b,b) = m_1(b,b,b,a) = m_2(b,b,b,a) = a.$$

□

Satz 2.25 *Ist eine Varietät $\mathcal{V}$ kongruenzdistributiv, dann ist sie auch kongruenzmodular. Existieren dabei die Jónsson-Terme für n, dann sind die Gleichungen aus Satz 2.22 für $2n-1$ erfüllt.*

Beweis: Bezeichnen $d_0, \ldots, d_n$ die Jónsson-Terme. Für $k = 0, \ldots, 2n-1$ definiert man:

$$m_k(a,b,c,d) := \begin{cases} d_{(k+1)/2}(a,b,d) & k \equiv 1 \pmod 4, \\ d_{k/2}(a,c,d) & k \equiv 2 \pmod 4, \\ d_{(k+1)/2}(a,c,d) & k \equiv 3 \pmod 4, \\ d_{k/2}(a,b,d) & k \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Nun gilt $m_0(a,b,c,d) = d_0(a,b,d) = a$ und $m_{2n-1}(a,b,c,d) = d_n(a,b,d)$ (n ungerade) oder $d_n(a,c,d)$ (n gerade) auf jeden Fall aber $m_{2n-1}(a,b,c,d) = d$. Für ungerade k gilt:

$$m_k(a,b,b,d) = d_{(k+1)/2}(a,b,d) = m_{k+1}(a,b,b,d).$$

Für gerade k sind zwei Fälle möglich. Gilt $k \equiv 2 \pmod 4$, dann ist $k/2$ ungerade und $k+1 \equiv 3 \pmod 4$. Daher:

$$m_k(a,a,b,b) = d_{k/2}(a,b,b) = d_{(k+2)/2}(a,b,b) = m_{k+1}(a,a,b,b).$$

Gilt $k \equiv 0 \pmod 4$ dann ist $k/2$ gerade und $k+1 \equiv 1 \pmod 4$ und es folgt:

$$m_k(a,a,b,b) = d_{k/2}(a,a,b) = d_{(k+2)/2}(a,a,b) = m_{k+1}(a,a,b,b).$$

Insgesamt folgt also, daß $\mathcal{V}$ auch kongruenzmodular ist. □

2.5 Fixpunkteigenschaft

Die Charakterisierung der Fixpunkteigenschaft stammt von W. Taylor [13].

Definition 2.26 Eine Algebra $\mathbf{A}$ hat die **Fixpunkteigenschaft**, falls es für jeden Endomorphismus $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ ein $a \in A$ gibt, mit $f(a) = a$. Eine Varietät $\mathcal{V}$ hat die **Fixpunkteigenschaft**, falls alle Algebren in $\mathcal{V}$ die Fixpunkteigenschaft haben.

Eine Algebra hat die **Übereinstimmungseigenschaft**, falls für je zwei Endomorphismen f und g ein $a \in A$ existiert, mit $f(a) = g(a)$. Analog wie oben definiert man die Übereinstimmungseigenschaft für Varietäten.

Bemerkung 2.27 Aus der Übereinstimmungseigenschaft folgt mit $g = id$ die Fixpunkteigenschaft.

Satz 2.28 *Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(*i*) *$\mathcal{V}$ hat die Fixpunkteigenschaft.*

(*ii*) *$\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots)$ hat die Fixpunkteigenschaft.*

(*iii*) *$\mathcal{V}$ hat die Übereinstimmungseigenschaft.*

(*iv*) *$\mathbf{F}(x, y)$ hat die Übereinstimmungseigenschaft.*

(*v*) *Es gibt einen Term $a(x)$, sodaß in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ gilt:*

$$a(x) = a(y)$$

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$ und $(iii) \Rightarrow (iv)$ sind offensichtlich. $(v) \Rightarrow (i)$ und $(v) \Rightarrow (iii)$ gelten, da Endomorphismen mit Termfunktionen vertauschen.

$(ii) \Rightarrow (v)$: Wir definieren in $\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots)$ einen Endomorphismus f durch $f(x_i) := f(x_{i+1})$, $i \in \mathbf{N}$. Da (ii) gilt, gibt es ein Element $b(x_1, \ldots, x_k)$ ($k \in \mathbf{N}$) aus $\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots)$ mit $f(b) = b$. Daraus folgt $b(x_1, \ldots, x_k) = f^k(b) = b(x_{k+1}, \ldots, x_{2k})$. Setzt man $a(x_1) := b(x_1, \ldots, x_1)$, dann erhält man (v).

$(iv) \Rightarrow (v)$: Seien f auf $\mathbf{F}(x, y)$ durch $f(x) := f(y) := x$ und g durch $g(x) := g(y) := y$ definiert. Wegen (iv) gibt es ein Element $b(x, y)$ mit $b(x, x) = f(b) = g(b) = b(y, y)$. Wieder setzt man $a(x) := b(x, x)$, woraus (v) folgt. $\square$

Beispiel 2.29 Jede Algebra mit nullstelligen Operationen erfüllt natürlich die Fixpunkt- und die Übereinstimmungseigenschaft.

Beispiel 2.30 In Satz 2.28 kann in (ii) $\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots)$ nicht dadurch ersetzt werden, daß jede endlich erzeugte freie Algebra in $\mathcal{V}$ die Fixpunkteigenschaft hat. Ein endlich erzeugter, freier, distributiver Verband ist endlich und daher vollständig. Jeder Verbandsendomorphismus ist monoton. Nach einem Satz von Tarski gilt, daß jede monotone Abbildung, eines vollständigen Verbandes in sich, einen Fixpunkt besitzt. Die Varietät der distributiven Verbände erfüllt aber nicht (iii), z.B.: gilt (iii) nicht im zweielementigen Verband für $f(a) := f(b) := a$ und $g(a) := g(b) := b$, wobei a, b die Verbandselemente bezeichnen.

Bemerkung 2.31 Da ein zweielementiger Verband aber die Fixpunkteigenschaft hat (es gibt hier nur drei Endomorphismen), gilt also, daß die Übereinstimmungseigenschaft für Algebren echt stärker als die Fixpunkteigenschaft ist.

2.6 Kongruenzrelationen in direkten Produkten

Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden [2] entnommen. Satz 2.43 ist ein Ergebnis dieser Diplomarbeit. Wir betrachten Varietäten mit der Eigenschaft, daß für je zwei Algebren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt, daß sich jede Kongruenzrelation $\Theta \in Con\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ in der Form

$$\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2, \quad \Theta_1 \in Con\mathbf{A}, \Theta_2 \in Con\mathbf{B} \tag{9}$$

darstellen läßt.

Beispiel 2.32 Ein bekanntes Beispiel für eine Varietät, die obige Eigenschaft erfüllt, ist die Varietät der Ringe mit Einselement. Sei $R = R_1 \times R_2$ und I ein Ideal in R, dann rechnet man leicht nach, daß $I_1 := \{a \in R_1 \mid \exists b \in R_2, (a,b) \in I\}$ ein Ideal in R_1 ist. Symmetrisch definiert man I_2. $I \subseteq I_1 \times I_2$ ist auf jeden Fall erfüllt. Sei $a \in I_1$ und $b \in I_2$. Daher gibt es Elemente a', b' mit $(a,a') \in I$, $(b',b) \in I$. Daher gilt auch $(a,a')(1,0) + (b',b)(0,1) = (a,b) \in I$ und damit $I = I_1 \times I_2$.

Lemma 2.33 *Sind $\Theta_1, \Phi_1 \in Con\mathbf{A}$ und $\Theta_2, \Phi_2 \in Con\mathbf{B}$, dann gilt:*

$$(\Phi_1 \times \Phi_2) \vee (\Theta_1 \times \Theta_2) = (\Phi_1 \vee \Theta_1) \times (\Phi_2 \vee \Theta_2).$$

Beweis: Da $\Phi_1 \times \Phi_2 \leq (\Phi_1 \vee \Theta_1) \times (\Phi_2 \vee \Theta_2)$ gilt, und die Ungleichung auch für $\Theta_1 \times \Theta_2$ richtig ist, bleibt nur mehr

$$(\Phi_1 \times \Phi_2) \vee (\Theta_1 \times \Theta_2) \geq (\Phi_1 \vee \Theta_1) \times (\Phi_2 \vee \Theta_2)$$

zu zeigen. Sei also $((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \in (\Phi_1 \vee \Theta_1) \times (\Phi_2 \vee \Theta_2)$. Daher gilt für ein (o.B.d.A. gerades) $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} (a_1,a_2) &\in \Phi_1 \circ \Theta_1 \circ \ldots \circ \Phi_1 \circ \Theta_1, \quad (n \text{ Faktoren}), \\ (b_1,b_2) &\in \Phi_2 \circ \Theta_2 \circ \ldots \circ \Phi_2 \circ \Theta_2, \quad (n \text{ Faktoren}). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}((a_1,a_2),(b_1,b_2)) &\in (\Phi_1\circ\Theta_1\circ\ldots\circ\Phi_1\circ\Theta_1)\times(\Phi_2\circ\Theta_2\circ\ldots\circ\Phi_2\circ\Theta_2)\\ &= (\Phi_1\times\Phi_2)\circ(\Theta_1\times\Theta_2)\circ\ldots\circ(\Phi_1\times\Phi_2)\circ(\Theta_1\times\Theta_2)\\ &\leq (\Phi_1\times\Phi_2)\vee(\Theta_1\times\Theta_2).\end{aligned}$$

□

Definition 2.34 Seien $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{V}$ gegeben. Dann bezeichne $\Pi_1\in Con\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ den Kern der Projektion auf $\mathbf{A}$. Daher $\Pi_1=\Delta_{\mathbf{A}}\times\nabla_{\mathbf{B}}=\{((a_1,b_1),(a_2,b_2))\mid a_1=a_2\}$. Analog definiert man $\Pi_2:=\nabla_{\mathbf{A}}\times\Delta_{\mathbf{B}}$.

Satz 2.35 *Sei $\Theta\in Con\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Θ *erfüllt* (9).

(ii) $\Pi_2\wedge(\Pi_1\vee\Theta)\leq\Theta$ *und* $\Pi_1\wedge(\Pi_2\vee\Theta)\leq\Theta$.

(iii) *Für alle $a,a_1,a_2\in A$ und alle $b,b_1,b_2\in B$ gilt:*

$$(a_1,b_1)\Theta(a_2,b_2)\Rightarrow(a_1,b)\Theta(a_2,b)\ \textit{und}\ (a,b_1)\Theta(a,b_2).$$

Beweis: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Gelte $\Theta=\Theta_1\times\Theta_2$. Dann folgt mit Lemma 2.33:

$$\begin{aligned}\Pi_2\wedge(\Pi_1\vee\Theta) &= \Pi_2\wedge((\Delta_{\mathbf{A}}\times\nabla_{\mathbf{B}})\vee(\Theta_1\times\Theta_2))\\ &= (\nabla_{\mathbf{A}}\times\Delta_{\mathbf{B}})\wedge((\Delta_{\mathbf{A}}\vee\Theta_1)\times(\nabla_{\mathbf{B}}\vee\Theta_2))\\ &= (\nabla_{\mathbf{A}}\times\Delta_{\mathbf{B}})\wedge(\Theta_1\times\nabla_{\mathbf{B}})\\ &= \Theta_1\times\Delta_{\mathbf{B}}\subseteq\Theta.\end{aligned}$$

Analog erhält man $\Pi_1\wedge(\Pi_2\vee\Theta)\subseteq\Theta$.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Sei $((a_1,b_1),(a_2,b_2))\in\Theta$. Aus der Definition von Π_1 folgt $(a_1,b)\Pi_1(a_1,b_1)$ und $(a_2,b_2)\Pi_1(a_2,b)$, daher $(a_1,b)(\Pi_1\circ\Theta\circ\Pi_1)(a_2,b)$. Aus $\Pi_1\circ\Theta\circ\Pi_1\subseteq\Theta\vee\Pi_1$ und $(a_1,b)\Pi_2(a_2,b)$ folgt:

$$(a_1,b)(\Pi_2\wedge(\Theta\vee\Pi_1))(a_2,b).$$

Wegen *(ii)* gilt daher

$$(a_1,b)\Theta(a_2,b).$$

Analog erhält man $(a, b_1)\Theta(a, b_2)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Wir definieren folgende zwei Relationen auf $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &:= \{(a_1, a_2) \mid \exists b \in B, (a_1, b)\Theta(a_2, b)\}, \\ \Theta_2 &:= \{(b_1, b_2) \mid \exists a \in A, (a, b_1)\Theta(a, b_2)\}. \end{aligned}$$

Zuerst zeigt man $\Theta_1 \in Con\mathbf{A}$. Reflexivität und Symmetrie übertragen sich von Θ auf Θ_1. Aus (iii) folgt:

$$(a_1, a_2) \in \Theta_1 \Rightarrow (a_1, b)\Theta(a_2, b), \quad \forall b \in B. \tag{10}$$

Gelte $a_1\Theta_1 a_2$ und $a_2\Theta_1 a_3$. Wegen (10) gilt $(a_1, b)\Theta(a_2, b)\Theta(a_3, b)$ für alle $b \in B$ und daher $(a_1, a_3) \in \Theta_1$. Damit ist gezeigt, daß Θ_1 eine Äquivalenzrelation ist. Sei $f_{\mathbf{A}}$ eine n-stellige Operation auf $\mathbf{A}$ und gelte $a_1\Theta_1 a_1', \ldots, a_n\Theta_1 a_n'$. Dann gilt für ein $b \in B$ $(a_i, b)\Theta(a_i', b)$, $i = 1, \ldots, n$. Es folgt

$$(f_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), f_{\mathbf{B}}(b, \ldots, b))\Theta(f_{\mathbf{A}}(a_1', \ldots, a_n'), f_{\mathbf{B}}(b, \ldots, b))$$

und damit $f_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)\Theta_1 f_{\mathbf{A}}(a_1', \ldots, a_n')$. Daher gilt $\Theta_1 \in Con\mathbf{A}$. Analog zeigt man $\Theta_2 \in Con\mathbf{B}$.

Es bleibt $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$ zu zeigen. Gelte $(a_1, b_1)\Theta(a_2, b_2)$. Wegen (iii) gibt es Elemente $a \in A, b \in B$ mit $(a_1, b)\Theta(a_2, b)$ und $(a, b_1)\Theta(a, b_2)$, woraus $(a_1, b_1)(\Theta_1 \times \Theta_2)(a_2, b_2)$ folgt. Umgekehrt gelte $(a_1, b_1)(\Theta_1 \times \Theta_2)(a_2, b_2)$, daher $a_1\Theta_1 a_2$ und $b_1\Theta_2 b_2$. Wegen (10) gilt

$$(a_1, b_1)\Theta(a_2, b_1)\Theta(a_2, b_2)$$

und damit $(a_1, b_1)\Theta(a_2, b_2)$. $\Box$

Satz 2.36 *Ist $Con\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ein distributiver Verband, dann erfüllt $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (9).*

Beweis: Aus $\Pi_1 \wedge \Pi_2 = \Delta_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}$ folgt:

$$\begin{aligned} \Pi_2 \wedge (\Pi_1 \vee \Theta) &= \Delta_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} \vee (\Pi_2 \wedge \Theta) \leq \Theta, \\ \Pi_1 \wedge (\Pi_2 \vee \Theta) &= \Delta_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} \vee (\Pi_1 \wedge \Theta) \leq \Theta, \end{aligned}$$

daher (ii) aus Satz 2.35. $\Box$

Satz 2.37 *Sei $\Theta \in Con\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Dann erfüllt Θ (9) genau dann, wenn*

$$(\Pi_1 \vee \Theta) \wedge (\Pi_2 \vee \Theta) = \Theta \qquad (11)$$

erfülllt ist.

Beweis: Ist $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$, dann gilt mit Hilfe von Lemma 2.33:

$$\begin{aligned}
&(\Pi_1 \vee \Theta) \wedge (\Pi_2 \vee \Theta) \\
&= ((\Delta_{\mathbf{A}} \times \nabla_{\mathbf{B}}) \vee (\Theta_1 \times \Theta_2)) \wedge ((\nabla_{\mathbf{B}} \times \Delta_{\mathbf{A}}) \vee (\Theta_1 \times \Theta_2)) \\
&= ((\Delta_{\mathbf{A}}\Theta_1) \times (\nabla_{\mathbf{B}} \vee \Theta_2)) \wedge ((\nabla_{\mathbf{A}} \vee \Theta_1) \times (\Delta_{\mathbf{B}} \vee \Theta_2)) \\
&= (\Theta_1 \times \nabla_{\mathbf{B}}) \wedge (\nabla_{\mathbf{A}} \times \Theta_2) = \Theta_1 \times \Theta_2 = \Theta.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt (11), dann erhält man unmittelbar (*ii*) aus Satz 2.35. □

Satz 2.38 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(*i*) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *erfüllt* (9).

(*ii*) *Für alle $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ gilt:*

$$\Theta(a_1, a_2) \times \Theta(b_1, b_2) = \Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2)).$$

(*iii*) *Für alle $a_1, a_2, a \in A$, $b_1, b_2, b \in B$ gilt:*

$$\begin{aligned}
((a_1, b), (a_2, b)) &\in \Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \text{ und} \\
((a, b_1), (a, b_2)) &\in \Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2)).
\end{aligned}$$

Beweis: (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Aus $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \Theta(a_1, a_2) \times \Theta(b_1, b_2)$ folgt $\Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \leq \Theta(a_1, a_2) \times \Theta(b_1, b_2)$. Andererseits gilt nach (*i*): $\Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \Theta_1 \times \Theta_2$, $\Theta_1 \in Con\mathbf{A}$, $\Theta_2 \in Con\mathbf{B}$, daher $(a_1, a_2) \in \Theta_1$ und $(b_1, b_2) \in \Theta_2$. Daraus folgt aber $\Theta(a_1, a_2) \times \Theta(b_1, b_2) \leq \Theta_1 \times \Theta_2 = \Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2))$.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*): Es gilt $((a_1, b), (a_2, b)) \in \Theta(a_1, a_2) \times \Theta(b_1, b_2)$, das wegen (*ii*) gleich $\Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2))$ ist. Analog gilt $((a, b_1), (a, b_2)) \in \Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2))$.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*): Sei $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \Theta$ für ein $\Theta \in Con\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Aus $\Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \leq \Theta$ und (*iii*) folgt aber Bedingung (*iii*) aus Satz 2.35. Da Θ beliebig war, erfüllt $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (9). □

Satz 2.39 *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren gleichen Typs. Dann erfüllt $\mathcal{K}$ (9) genau dann wenn für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, alle $a_1, a_2 \in A$ und alle $b_1, b_2 \in B$*

$$((a_1, b), (a_2, b)) \in \Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \tag{12}$$

gilt.

Beweis: Daß (12) notwendig für (9) ist, folgt aus Bedingung (*iii*) von Satz 2.38. Um zu zeigen, daß (12) auch hinreichend ist, zeigt man, daß (*iii*) für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ gilt. Sei $a_1, a_2, a \in A$ und $b_1, b_2, b \in B$. Aus (12) folgt:

$$((a_1, b), (a_2, b)) \in \Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2)).$$

Angewandt auf $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ erhält man:

$$((b_1, a), (b_2, a)) \in \Theta((b_1, a_1), (b_2, a_2)).$$

Mit Hilfe des kanonischen Isomorphismus von $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ auf $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ erhält man:

$$((a, b_1), (a, b_2)) \in \Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2)).$$

□

Satz 2.40 *Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät. $\mathcal{V}$ erfüllt (9) genau dann, wenn für $m \geq 1$, $n \geq 0$ $(m+1)$-stellige Terme $p_0, \ldots, p_n$, zweistellige Terme $q_{ij}(x_0, x_1)$, dreistellige Terme $r_{ij}(x_0, x_1, x_2)$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ und Zahlen $k(0), \ldots, k(n)$ ($k(i) = 0$ oder 1) existieren, sodaß in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ folgende Gleichungen gelten:*

$$x_0 = p_0(x_{k(0)}, q_{01}, \ldots, q_{0m}), \quad x_1 = p_n(x_{1-k(n)}, q_{n1}, \ldots, q_{nm}),$$

$$p_j(x_{1-k(j)}, q_{j1}, \ldots, q_{jm}) = p_{j+1}(x_{k(j+1)}, q_{j+1,1} \ldots, q_{j+1,m}), \quad j = 0 \ldots, n-1,$$

$$x_2 = p_0(x_{k(0)}, r_{11}, \ldots, r_{1m}) = p_n(x_{1-k(n)}, r_{n1}, \ldots, r_{nm}),$$

$$p_j(x_{1-k(j)}, r_{j1}, \ldots, r_{jm}) = p_{j+1}(x_{k(j+1)}, r_{j+1,1} \ldots, r_{j+1,m}), \quad j = 0 \ldots, n-1.$$

Beweis: $\mathcal{V}$ habe Eigenschaft (9). Sei $\mathbf{A} = \mathbf{F}(x_0, x_1)$ und $\mathbf{B} = \mathbf{F}(x_0, x_1, x_2)$. Nach Satz 2.39 gilt:

$$((x_0, x_2), (x_1, x_2)) \in \Theta((x_0, x_0), (x_1, x_1)).$$

Jedes Element von $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ist von der Form $(q(x_0, x_1), r(x_0, x_1, x_2))$ und für jeden $(m+1)$-stelligen Term p gilt $p((u_0, v_0), \ldots, (u_m, v_m)) = (p(u_0, \ldots, u_m), p(v_0, \ldots, v_m))$, $u_i \in \mathbf{A}$, $v_i \in \mathbf{B}$, $i = 0, \ldots, m$. Damit, und unter Benützung von Lemma 1.32, erhält man die gewünschten Gleichungen.

Gelten umgekehrt die obigen Gleichungen in $\mathcal{V}$, dann erhält man mit der Substitution $x_0 := a_1$, $x_1 := a_2$ in den ersten drei Gleichungen, $x_0 := b_1$, $x_1 := b_2$, $x_2 := b$ in den zweiten drei Gleichungen und Lemma 1.32, daß (12) erfüllt ist. □

Beispiel 2.41 Für die Varietät der Ringe mit Einselement (vgl. Beispiel 2.32) sind obige Gleichungen für $n = 0$ und $m = 2$ mit $p_0(x, y, z) := xy + z$, $q_{01} := 1$, $q_{02} := 0$, $r_{01} := 0$, $r_{02} := x_2$ und $k(0) := 0$ erfüllt.

Beispiel 2.42 Aus Beispiel 2.11 und Satz 2.36 folgt, daß die Varietät der Verbände Eigenschaft (9) erfüllt. Die Gleichungen aus Satz 2.40 sind für $n = 0$ und $m = 2$ erfüllt. Es gilt $p_0 := (x \wedge y) \vee z$, $q_{01} := x_0 \vee x_1$, $q_{02} := x_0 \wedge x_1$, $r_{01} := r_{02} := x_2$ und $k(0) := 0$.

Satz 2.36 läßt sich nun auch mit Hilfe der zugehörigen Mal'cev-Bedingungen zeigen.

Satz 2.43 *Ist eine Varietät $\mathcal{V}$ kongruenzdistrivutiv, dann erfüllt sie Eigenschaft* (9)*. Gibt es für $n \in \mathbf{N}$ Jónsson-Terme, dann sind die Gleichungen aus Satz 2.40 für n und $m = 2$ erfüllt.*

Beweis: Seien $d_0, \ldots, d_n$ die gegebenen Jónsson-Terme. Wir definieren für $i = 0, \ldots, n$:

$$p_i(x, y, z) := d_i(y, x, z),$$

$$q_{i1} := x_0, \quad , q_{i2} := x_1, \quad , r_{i1} := r_{i2} := x_2,$$

$$k(i) := \begin{cases} 1 & i \text{ gerade,} \\ 0 & i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$p_0(x_{k(0)}, q_{01}, q_{02}) = p_0(x_1, x_0, x_1) = d_0(x_0, x_1, x_1) = x_0,$$

$$p_n(x_{1-k(n)}, q_{n1}, q_{n2}) = p_n(x_{1-k(n)}, x_0, x_1) = d_n(x_0, x_{1-k(n)}, x_1) = x_1.$$

Für gerade $i < n$ erhält man:

$$p_i(x_{1-k(i)}, q_{i1}, q_{i2}) = p_i(x_0, x_0, x_1) = d_i(x_0, x_0, x_1)$$

$$= d_{i+1}(x_0, x_0, x_1) = p_{i+1}(x_0, x_0, x_1) = p_{i+1}(x_{k(i+1)}, q_{i+1,1}, q_{i+1,2}).$$

Für ungerade $i < n$ gilt:

$$p_i(x_{1-k(i)}, q_{i1}, q_{i2}) = p_i(x_1, x_0, x_1) = d_i(x_0, x_1, x_1)$$

$$= d_{i+1}(x_0, x_1, x_1) = p_{i+1}(x_1, x_0, x_1) = p_{i+1}(x_{k(i+1)}, q_{i+1,1}, q_{i+1,2}).$$

Damit sind die ersten drei Gleichungen aus Satz 2.40 erfüllt. Weiters gelten auch die letzten drei Gleichungen:

$$p_0(x_{k(0)}, r_{01}, r_{02}) = d_0(x_2, x_{k(0)}, x_2) = x_2,$$

$$p_n(x_{1-k(n)}, r_{n1}, r_{n2}) = d_n(x_2, x_{1-k(n)}, x_2) = x_2,$$

$$p_i(x_{1-k(i)}, r_{i1}, r_{i2}) = d_i(x_2, x_{1-k(i)}, x_2) = x_2 = d_{i+1}(x_2, x_{k(i+1)}, x_2)$$

$$= p_{i+1}(x_{k(i+1)}, r_{i+1,1}, r_{i+1,2}), \quad i = 0, \ldots, n.$$

□

Bemerkung 2.44 Das obige Verfahren liefert zwar immer aus gegebenen Jónsson-Termen die Gleichungen aus Satz 2.40, aber nicht unbedingt ein System mit minimaler Anzahl von Termen p_i. Aus den Jónsson-Termen für Verbände erhält man z.B. drei Terme, obwohl schon einer (siehe Beispiel 2.42) ausreicht. Die Jónsson-Terme für Verbände sind ihrerseits bezüglich der Anzahl der auftretenden Terme minimal.

Falls Eigenschaft (9) in einer Varietät gilt, dann natürlich auch für das direkte Produkt endlich vieler Algebren. Folgender Satz zeigt, daß das der einzig mögliche Fall ist.

Satz 2.45 *Hat* $\mathbf{A} = \Pi_{i \in I} \mathbf{A}_i$ *Eigenschaft* (9)*, dann sind fast alle* $\mathbf{A}_i$ *einelementig.*

Beweis: Sei $\Theta := \{(a, b) \mid a, b \in A, a_i = b_i$ für fast alle $i\}$. Da die fundamentalen Operationen auf $\mathbf{A}$ komponenetenweise definiert sind, ist Θ eine Kongruenzrelation von $\mathbf{A}$. Da $\Theta = \Pi_{i \in I} \Theta_i$ gilt, müssen alle $\Theta_i = \nabla_{\mathbf{A}_i}$ sein, da $(a, b) \in \Theta$ immer gilt, falls $a_j = b_j$, $\forall j$, $j \neq i$. Dann ist aber auch $\Theta = \nabla_{\mathbf{A}}$, woraus folgt, daß fast alle $\mathbf{A}_i$ einelementig sind. □

2.7 Der chinesische Restsatz

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß eine Varietät genau dann dem chinesischen Restsatz genügt, falls es einen Majoritätsterm gibt. Der Beweis stammt aus [14]. Dazu wird folgende Verallgemeinerung des chinesischen Restsatzes auf universelle Algebren benötigt:

Definition 2.46 Eine Algebra $\mathbf{A}$ erfüllt den **chinesischen Restsatz** genau dann, wenn zu Kongruenzklassen $K_0, \dots, K_n$, $n \in \mathbf{N}$, die paarweise nichtleeren Durchschnitt haben, d.h.: $\exists a_{ij} \in K_i \cap K_j$, $0 \leq i < j \leq n$, ein $b \in \bigcap_{i=0}^{n} K_i$ existiert. Eine Varietät $\mathcal{V}$ erfüllt den **chinesischen Restsatz**, wenn er in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ gilt.

Bemerkung 2.47 Der klassische chinesische Restsatz besagt, daß ein System von Kongruenzen der Form $x \equiv a_0(k_0), \dots, x \equiv a_n(k_n)$ mit paarweise teilerfremden $k_i \in \mathbf{N}$ lösbar ist, alle Lösungen sind dabei bezüglich $k_0 \cdots k_n$ kongruent. Da für feste k_i und k_j eine Darstellung $1 = ak_i + bk_j$ existiert gilt $a_i + (a_j - a_i)ak_i = a_j + (a_i - a_j)bk_j$, daher $[a_i](k_i) \cap [a_j](k_j) \neq \emptyset$. Definition 2.46 ist also eine direkte Verallgemeinerung des klassischen chinesischen Restsatzes.

Sind die Klassen K_i, $i = 0, \dots, n$, paarweise nicht disjunkt, dann auch die Klassen $L_k := [\{a_{ij} \mid i = k \text{ oder } j = k\}]$, $k = 0, \dots, n$. Erfüllt eine Algebra den chinesischen Restsatz, dann existiert ein $b \in \bigcap_{k=0}^{n} L_k$. Da für alle k $L_k \subseteq K_k$ gilt, ist auch $b \in \bigcap_{k=0}^{n} K_k$. Man kann den chinesischen Restsatz daher auch folgendermaßen formulieren: Eine Algebra $\mathbf{A}$ genügt genau dann dem chinesischen Restsatz, falls für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\forall a_{ij} \in A, 0 \leq i < j \leq n, \quad \exists b, b \in \bigcap_{k=0}^{n} [\{a_{ij} \mid i = k \text{ oder } j = k\}] \tag{13}$$

gilt. Es gilt sogar:

Lemma 2.48 *Eine Algebra* $\mathbf{A}$ *genügt genau dann dem chinesischen Restsatz, wenn* (13) *für* $n = 2$ *erfüllt ist.*

Beweis: Zu zeigen ist, daß (13) für alle $n \in \mathbf{N}$ erfüllt ist. Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion. Für $n = 2$ wird die Gültigkeit der Aussage vorausgesetzt. Sei (13) für $n-1$ erfüllt. Daher existieren zu $a_{ij} \in A$, $0 \leq i < j \leq n$, Elemente b_h, $0 \leq h \leq n$ mit $b_h \in \bigcap_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq h}} [\{a_{ij} \mid i = k \text{ oder } j = k, i \neq h \neq j\}]$. Man setzt nun $b_{0j} := b_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, und $b_{ij} := b_n$, $1 \leq i < j \leq n-1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, daß es ein $c \in A$ gibt, mit $c \in [b_1, \ldots, b_{n-1}]$ und $c \in [b_j, b_n]$, $1 \leq j \leq n-1$. Da $b_k \in L_n$, $k = 1, \ldots, n-1$, gilt $(\{a_{ij} \mid i = n \text{ oder } j = n, i \neq h \neq j\} \subseteq \{a_{ij} \mid i = n \text{ oder } j = n\})$, folgt $c \in [b_1, \ldots, b_{n-1}] \subseteq L_n$. Aus $c \in [b_1, b_n]$ folgt $c \in \bigcap_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 1 \neq k \neq n}} L_k$. Aus $c \in [b_2, b_n]$ folgt $c \in L_1$. Insgesamt also $c \in \bigcap_{0 \leq k \leq n} L_k$. □

Es gilt also, daß eine Varietät $\mathcal{V}$ dem chinesischen Restsatz genügt, falls in allen Algebren**A** aus $\mathcal{V}$

$$\forall a_1, a_2, a_3 \in A, \quad \exists b, b \in [a_1, a_2] \cap [a_1, a_3] \cap [a_2, a_3] \tag{14}$$

gilt. Diese Bedingung muß nur mehr in eine geeignete Mal'cev-Bedingung übersetzt werden.

Satz 2.49 *Eine Varietät $\mathcal{V}$ genügt genau dann dem chinesischen Restsatz, falls es einen Majoritätsterm gibt.*

Beweis: Erfülle $\mathcal{V}$ den chinesischen Restsatz. Aus (14) folgt, daß in $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$ ein Element m existiert, mit

$$\begin{array}{lll} m(x_1, x_2, x_3) & \Theta(x_1, x_2) & x_1, \\ m(x_1, x_2, x_3) & \Theta(x_1, x_3) & x_1, \\ m(x_1, x_2, x_3) & \Theta(x_2, x_3) & x_2. \end{array}$$

Daraus folgt mit Hilfe von Lemma 2.2 die Existenz eines Majoritätsterms.

Umgekehrt sei ein Majoritätsterm m für $\mathcal{V}$ gegeben, **A** eine Algebra aus $\mathcal{V}$ und $a_1, a_2, a_3 \in A$. Dann folgt

$$\begin{array}{lll} m(a_1, a_2, a_3) & \Theta(a_1, a_2) & m(a_1, a_1, a_3) = a_1, \\ m(a_1, a_2, a_3) & \Theta(a_1, a_3) & m(a_1, a_2, a_1) = a_1, \\ m(a_1, a_2, a_3) & \Theta(a_2, a_3) & m(a_1, a_2, a_2) = a_2. \end{array}$$

Daher erfüllt $b := m(a_1, a_2, a_3)$ (14). □

Bemerkung 2.50 Aus Abschnitt 2.2 folgt sofort, daß alle Varietäten, die dem chinesischen Restsatz genügen, kongruenzdistributiv sind.

2.8 Regularität

G. Grätzer charaktersisierte in [5] als erster reguläre Varietäten. In diesem Abschnitt wird eine vereinfachte Version aus [14] gezeigt. Die Charakterisierung schwach regulärer Varietäten ist eine „Mischung“ aus Willes Charakterisierung regulärer Varietäten und der Charakterisierung schwach regulärer Varietäten durch Grätzer.

Definition 2.51 Eine Algebra $\mathbf{A}$ heißt **regulär**, wenn für Kongruenzrelationen $\Theta, \Phi \in Con\mathbf{A}$, die eine gemeinsame Kongruenzklasse haben, $\Theta = \Phi$ folgt. Eine Varietät $\mathcal{V}$ heißt **regulär**, wenn alle Algebren aus $\mathcal{V}$ regulär sind.

Definition 2.52 Eine Algebra $\mathbf{A}$ heißt **schwach regulär**, wenn ein Element $o \in A$ existiert, sodaß zwei Kongruenzrelationen Θ, Φ übereinstimmen, wenn $[o]\Theta = [o]\Phi$ gilt. Analog wie oben definiert man schwach reguläre Varietäten.

Lemma 2.53 *Eine Algebra* $\mathbf{A}$ *ist genau dann regulär, wenn für alle* $a_1, a_2, b_0 \in A$ *eine natürliche Zahl* n *existiert, mit:*

$$\exists b_1, \ldots, b_n \in A, \quad (a_1, a_2) \in \Theta(b_1, \ldots, b_n),$$
$$(b_0, b_i) \in \Theta(a_1, a_2), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Beweis: Sei $\mathbf{A}$ regulär und $a_1, a_2, b_0 \in A$. Aus der Regularität folgt:

$$\Theta(a_1, a_2) = \Theta([b_0]\Theta(a_1, a_2)).$$

Aus $(a_1, a_2) \in \Theta([b_0]\Theta(a_1, a_2))$ und Satz 1.31 folgt, daß es für ein $n \in \mathbf{N}$ Elemente $b_1, \ldots, b_n \in [b_0]\Theta(a_1, a_2)$ und einstellige Polynome $p_1, \ldots, p_{n-1}$ gibt, mit:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & p_1(b_1), \\ p_1(b_2) & = & p_2(b_2), \\ & \vdots & \\ p_{n-2}(b_{n-1}) & = & p_{n-1}(b_{n-1}), \\ p_{n-1}(b_n) & = & a_2. \end{array}$$

Daher gilt mit Satz 1.31 auch $(a_1, a_2) \in \Theta(b_1, \ldots, b_n)$. Damit ist (15) erfüllt.

Sei nun umgekehrt (15) erfüllt und $\Phi \in Con\mathbf{A}$. Gilt für ein beliebiges $b_0 \in A$, daß $\Phi = \Theta([b_0]\Phi)$ ist, dann ist die Regularität von $\mathbf{A}$ gezeigt. Da $\Theta([b_0]\Phi) \leq \Phi$ immer gilt, ist $\Phi \leq \Theta([b_0]\Phi)$ zu zeigen. Sei $(a_1, a_2) \in \Phi$ gegeben. Dann gibt es nach Voraussetzung für ein $n \in \mathbf{N}$ Elemente $b_1, \ldots, b_n \in A$ mit $(b_0, b_i) \in \Theta(a_1, a_2)$, $i = 1, \ldots, n$, und $(a_1, a_2) \in \Theta(b_1, \ldots, b_n)$. Aus $(a_1, a_2) \in \Phi$ folgt $\Theta(a_1, a_2) \leq \Phi$, daher $(b_0, b_i) \in \Phi$, $i = 1, \ldots, n$, und $(a_1, a_2) \in \Theta([b_0]\Phi)$, womit $\Phi \leq \Theta([b_0]\Phi)$ gezeigt ist. □

Lemma 2.54 *Eine Algebra ist genau dann schwach regulär, wenn ein $o \in A$ existiert, sodaß für beliebige $a_1, a_2 \in A$ ein $n \in \mathbf{N}$ existiert, mit dem* (15) *für a_1, a_2, o erfüllt ist.*

Beweis: Der Beweis ist analog zum obigen Lemma, wenn man b_0 durch o und regulär durch schwach regulär ersetzt. □

Satz 2.55 *Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(*i*) *$\mathcal{V}$ ist regulär.*

(*ii*) *Es gibt ein $n \in \mathbf{N}$, für welches* (15) *in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ und alle $a_1, a_2, b_0 \in A$ erfüllt ist.*

(*iii*) *Es gibt dreistellige Terme b_i, $i = 1, \ldots, n$, und vierstellige Terme q_k, $k = 0, \ldots, m$, $m \in \mathbf{N}$, sodaß für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $k = 0, \ldots, m-1$ und geeignete $1 \leq i(k), j(k) \leq n$ in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ folgende Gleichungen gelten:*

$$\begin{aligned} b_i(x, x, z) &= z, \\ q_0(b_{j(0)}(x, y, z), x, y, z) &= x, \\ q_k(b_{i(k)}(x, y, z), x, y, z) &= q_{k+1}(b_{j(k+1)}(x, y, z), x, y, z), \\ q_m(b_{i(m)}(x, y, z), x, y, z) &= y. \end{aligned}$$

Beweis: (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Aus (*i*) und Lemma 2.53 folgt, daß es ein $n \in \mathbf{N}$ gibt, sodaß (15) in $\mathbf{F}(x, y, z)$ für $a_1 := x$, $a_2 := y$ und $b_0 := z$ gilt. Sei $\mathbf{A}$ aus $\mathcal{V}$ und $a_1, a_2, b_0 \in A$. Wir betrachten den Einsetzungshomomorphismus $\phi : \mathbf{F}(x, y, z) \to \mathbf{A}$ mit $x \mapsto a_1, y \mapsto a_2, z \mapsto b_0$. Aus $(x, y) \in \Theta(b_1(x, y, z), \ldots, b_n(x, y, z))$ und Satz 1.31 folgt die Existenz von Polynomen $p_0, \ldots, p_m$ mit $x \in p_0(b_1, \ldots, b_n)$, $y \in p_m(b_1, \ldots, b_n)$ und

$p_i(b_1,\dots,b_n)\cap p_{i+1}(b_1,\dots,b_n)\neq\emptyset$, $i=0,\dots,m-1$. Da Homomorphismen mit Polynomen vertauschen, gilt mit Satz 1.31 auch

$$(a_1,a_2)\in\Theta(b_1(a_1,a_2,b_0),\dots,b_n(a_1,a_2,b_0)).$$

Analog gilt

$$(b_0,b_i(a_1,a_2,b_0))\in\Theta(a_1,a_2),\quad i=1,\dots,n.$$

Die gesuchten Elemente aus A sind also $b_i' := b_i(a_1,a_2,b_0)$.

$(ii)\Rightarrow(i)$: folgt unmittelbar aus Lemma 2.53.

$(ii)\Leftrightarrow(iii)$: Wie im ersten Teil des Beweises betrachtet man (15) für $\mathbf{F}(x,y,z)$ mit $a_1:=x$, $a_2:=y$ und $b_0:=z$. Wegen Lemma 2.2 ist $(z,b_i(x,y,z))\in\Theta(x,y)$ äquivalent zur Gültigkeit von $b_i(x,x,z)=z$ in allen Algebren aus $\mathcal{V}$. Wie im ersten Teil des Beweises ist $(x,y)\in\Theta(b_0,\dots,b_n)$ äquivalent zur Existenz der Polynome $p_0,\dots,p_m$, die die Bedingung aus Satz 1.31 erfüllen. Da jedes einstellige Polynom ein Term ist, in dem bis auf eine freie Variable alle anderen durch Elemente der Algebra substituiert wurden, folgt:

$$p_i(u)=t_i(u,d_1^i(x,y,z),\dots,d_{l(i)}^i(x,y,z)),\quad i=1,\dots,n.$$

Dabei ist t_i ein $l(i)$-stelliger Term, d^i ein Element aus $\mathbf{F}(x,y,z)$. Man setzt nun

$$q_i(u,x,y,z):=t_i(u,d_1^i(x,y,z),\dots,d_{l(i)}^i(x,y,z)),\quad i=1,\dots,n.\tag{16}$$

Weiters sei $b_{j(0)}(x,y,z)$ das Element mit $p_0(b_{j(0)})=x$, $i(k)$ und $j(k)$ die Indizes mit $p_k(b_{i(k)})=p_k(b_{j(k)})\in p_k(b_1,\dots,b_n)\cap p_k(b_1,\dots,b_n)$, $k=0,\dots,m-1$, und $b_{i(m)}(x,y,z)$ das Element mit $p_m(b_{i(m)})=y$. Mit (16) erhält man so die gewünschten Gleichungen. $\square$

Man könnte glauben, daß sich die schwache Regularität genauso in eine Mal'cev-Bedingung übersetzen läßt, wie Regularität. Wendet man aber direkt Lemma 2.54 auf $\mathbf{F}(x,y,z)$ an, dann erhält man ein Element $o(x,y,z)$, daß bei Substitution durch Elemente a_1,a_2,c einer Algebra $\mathbf{A}$ aus $\mathcal{V}$ von a_1,a_2 abhängig ist. Es zeigt sich aber, daß ein Element $o(z)$ gefunden werden kann, daß die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Satz 2.56 *Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *$\mathcal{V}$ ist schwach regulär.*

(*ii*) *Es gibt in jeder Algebra* $\mathbf{A}$ *aus* $\mathcal{V}$ *ein Element* o *und ein für alle Albegren gleiches* $n \in \mathbf{N}$*, sodaß* (15) *für* a_1, a_2, o *erfüllt ist, wobei* a_1, a_2 *beliebige Elemente aus* A *sind.*

(*iii*) *Es gibt einen einstelligen Term* o*, dreistellige Terme* b_i*,* $i = 1, \ldots, n$ *und vierstellige Terme* q_k*,* $k = 0, \ldots, m$*,* $m \in \mathbf{N}$*, sodaß für alle* $i = 1, \ldots, n$ *und alle* $k = 0, \ldots, m-1$ *und geeignete* $1 \leq i(k), j(k) \leq n$ *in allen Algebren aus* $\mathcal{V}$ *folgende Gleichungen gelten:*

$$\begin{aligned} b_i(x, x, o(z)) &= o(z), \\ q_0(b_{j(0)}(x, y, o(z)), x, y, o(z)) &= x, \\ q_k(b_{i(k)}(x, y, o(z)), x, y, o(z)) &= q_{k+1}(b_{j(k+1)}(x, y, o(z)), x, y, o(z)), \\ q_m(b_{i(m)}(x, y, o(z)), x, y, o(z)) &= y. \end{aligned}$$

Beweis: (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Speziell ist $\mathbf{F}(x_0, x_1, \ldots)$ schwach regulär. Wegen Lemma 2.54 existiert daher ein Element o_1 und ein $n \in \mathbf{N}$, sodaß für a_1, a_2, o_1 (15) erfüllt ist, $a_1, a_2 \in \mathbf{F}(x_0, x_1, \ldots)$. Da jeder Term nur aus endlich vielen Variablen gebildet werden kann, kann man o.B.d.A. annehmen, daß o_1 nur Variablen x_i, $i \geq 2$, enthält (evtl. nach Umnumerierung der Variablen). Nun betrachtet man den Homomorphismus $\phi : \mathbf{F}(x_0, x_1, \ldots) \to \mathbf{F}(x, y, z)$:

$$\phi(x_0) := x, \quad \phi(x_1) := y, \quad \phi(x_i) := z, \quad i \geq 2.$$

Setzt man $o := \phi(o_1)$, und berücksichtigt man wie im ersten Teil des Beweises von Satz 2.55, daß Homomorphismen mit Polynomen vertauschen und Satz 1.31, dann erhält man, daß in $\mathbf{F}(x, y, z)$ mit $o(z)$ und n und beliebigen $a_1(x, y, z), a_2(x, y, z)$ ebenfalls (15) erfüllt ist, speziell also für $a_1 := x$ und $a_2 := y$. Ist jetzt $\mathbf{A}$ eine Algebra aus $\mathcal{V}$, dann wählt man ein beliebiges Element $c \in A$ und definiert $o_{\mathbf{A}} := o(c)$. Betrachtet man nun wieder wie in Satz 2.55 den Einsetzungshomomorphismus ϕ, dann erhält man analog, daß für beliebige $a_1, a_2 \in A$ und $b_0 := o_{\mathbf{A}}$ (15) erfüllt ist.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*): folgt aus Lemma 2.54.

(*ii*) $\Leftrightarrow$ (*iii*): Analog zu Satz 2.55 betrachtet man $\mathbf{F}(x, y, z)$. Es ist nur z durch $o(z)$ zu ersetzen. $\Box$

Satz 2.57 *Sei* $\mathcal{V}$ *eine schwach reguläre Varietät und* $\mathbf{A}$ *aus* $\mathcal{V}$*. Bezeichne* $O(\mathbf{A})$ *die Menge aller* $o \in A$*, die die Bedingung aus der Definition der schwachen Regularität erfüllen. Ist* $\mathbf{B}$ *eine Unteralgebra von* $\mathbf{A}$*, dann gilt* $O(\mathbf{A}) \cap B \neq \emptyset$*.*

Beweis: Da im Beweis von Satz 2.56 für alle $c \in A$ $o(c) \in O(\mathbf{A})$ gilt, ist für ein $b \in B$ $o(b) \in B \cap O(\mathbf{A})$. $\square$

Definition 2.58 Eine Varietät $\mathcal{V}$ heißt **idempotent**, wenn alle Operationen idempotent sind, daher, wenn für alle $f \in \mathcal{F}$ in allen Algebren aus $\mathcal{V}$ die Gleichung $f(x, \ldots, x) = x$ gilt.

Bemerkung 2.59 Eine idempotente, schwach reguläre Varietät ist regulär, da aus $o(a) = a$ für alle $a \in A$, $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, wobei o den einstelligen Term aus Satz 2.56 bezeichnet, $O(\mathbf{A}) = A$ und damit Regularität folgt.

Definition 2.60 Eine **Quasigruppe** ist eine Algebra $\mathbf{A}$ vom Typ (∘;2) wobei für alle $a \in A$ die Abbildungen

$$\begin{aligned} x &\mapsto a \circ x, \\ x &\mapsto x \circ a \end{aligned}$$

Permutationen sind. Quasigruppen lassen sich folgendermaßen als Varietät schreiben. Man betrachtet Algebren vom Typ $(\circ, /, \backslash; 2, 2, 2)$, die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} x\backslash(x \circ y) &= y, \\ (x \circ y)/y &= x, \\ x \circ (x\backslash y) &= y, \\ (x/y) \circ y &= x. \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt die Surjektivität der obigen Abbildungen und aus den ersten beiden Gleichungen die Injektivität. Umgekehrt, sind die zwei Abbildungen Permutationen, dann existieren zu Elementen a, b einer Algebra $\mathbf{A}$ offensichtlich genau zwei Elemente a/b und $a\backslash b$, sodaß die Gleichungen erfüllt sind.

Beispiel 2.61 Sei $\mathcal{V}$ die Varietät der Quasigruppen. Definiert man $b_1(x, y, z) := z$, $b_2(x, y, z) := x \circ (y\backslash z)$ und $q_0(u, x, y, z) := (x \circ (y\backslash z))/(y\backslash u)$, dann gilt $b_1(x, x, z) = z$ und $q_0(b_1(x, y, z), x, y, z) = x$. Aus $(x/(y\backslash x)) \circ (y\backslash x) = x$, $y \circ (y\backslash x) = x$ und der Permutationseigenschaft von $\circ$ folgt $y = x/(y\backslash x)$. Daraus folgt $q_0(b_2(x, y, z), x, y, z) = y$. Mit Satz 2.55 erhält man also, daß Quasigruppen regulär sind. Speziell ist dann auch die Varietät der Gruppen regulär.

3 Der Wille-Algorithmus

Die Ergebnisse des folgenden Abschnitts stammen aus [14]. Eine ähnliche Beschreibung des Algorithmus kann in [11] gefunden werden.

3.1 Beschreibung des Algorithmus

Betrachtet man die Mal'cev-Bedingungen zur Kongruenzvertauchbarkeit oder -distributivität, dann stellt sich die Frage, ob es möglich ist, zu jeder Kongruenzengleichung äquivalente Mal'cev-Bedingungen zu finden. Der Wille-Algorithmus liefert eine konstruktive Methode zur Gewinnung von Mal'cev-Bedingungen, allerdings wird dieser Begriff dabei etwas erweitert.

Definition 3.1 Ist X eine Variablenmenge, M eine beliebige Menge, dann bezeichnet man eine Abbildung $\iota : X \to M$ als **Interpretation** der Variablen aus X mit Elementen aus M. Ist t ein Ausdruck, in dem Variablen aus X vorkommen, dann schreibt man $\iota(t)$, dafür, daß alle Variablen aus X in t durch die entsprechenden Elemente aus M ersetzt werden.

Definition 3.2 Eine **Kongruenzengleichung** ist eine Gleichung der Form $\zeta = \eta$, wobei ζ und η Terme gebildet mit den binären Operationen $\vee, \wedge, \circ$ sind. Analog definiert man eine **Kongruenzenungleichung**. Sei $\mathbf{A}$ eine Algebra und bezeichne C die Variablenmenge von ζ und η, dann heißt eine Kongruenzengleichung bzw. -ungleichung **gültig** in $Con\mathbf{A}$, wenn für jede Interpretation $\tau : C \to A$ $\tau(\zeta) = \tau(\eta)$ bzw. $\tau(\zeta) \leq \tau(\eta)$ gilt.

Es stellt keine Einschränkung dar, wenn im weiteren Kongruenzenungleichungen betrachtet werden. Wesentliches Hilfsmittel zur Gewinnung von Mal'cev-Bedingungen in Abschnitt 2 war Satz 1.12, der Ausdrücke der Form $\alpha \vee \beta$ durch Ausdrücke, die nur mit $\circ$ gebildet werden ersetzt. Diese Vorgangsweise soll jetzt präzisiert werden.

Definition 3.3 Wir betrachten im folgenden zwei disjunkte, abzählbare Variablenmengen C und E, wobei E wohlgeordnet sein soll, d.h.: in jeder Teilmenge von E gibt es ein kleinstes Element. (Bei Interpretation der Variablen werden Variablen aus C als Kongruenzrelationen interpretiert und Variablen aus E als Algebraelemente).

Ist ζ ein Term in Variablen aus C und in den Operationen $\vee, \wedge, \circ$, dann bezeichne ζ^m jenen Term, der aus ζ hervorgeht, indem jeder Teilterm von ζ der Form $\zeta_1 \vee \zeta_2$ durch $\zeta_1 \circ (\zeta_2 \circ (\zeta_1 \circ \ldots))$, m Faktoren, ersetzt wird. Da $\circ$ im Kongruenzrelationenverband einer Algebra assoziativ ist, schreibt man auch $\zeta_1 \circ \zeta_2 \circ \zeta_1 \circ \ldots$.

Ist ζ die linke Seite einer Kongruenzenungleichung, dann faßt der folgende Algorithmus, denkt man sich die Variablen aus C durch Kongruenzrelationen und die Variablen aus E durch Algebraelemente interpretiert, jene Algebraelemente in Äquivalenzklassen zusammen, die für $(u, v) \in \zeta$ unbedingt in Relation stehen müssen.

Beispiel 3.4 Sei $\mathbf{A}$ eine Algebra, $a_0, a_1 \in A$ und gelte $(a_0, a_1) \in ((\Theta_1 \vee \Theta_2) \circ \Theta_3) \wedge \Theta_4 =: \Phi$, $\Theta_i \in Con\mathbf{A}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Dann gilt wegen Satz 1.12: $\exists m \in \mathbf{N}, (a_0, a_1) \in \Phi^m$. Sei z.B. $m = 3$.

1. $(a_0, a_1) \in ((\Theta_1 \circ \Theta_2 \circ \Theta_1) \circ \Theta_3) \wedge \Theta_4$.

2. $(a_0, a_1) \in (\Theta_1 \circ \Theta_2 \circ \Theta_1) \circ \Theta_3$, $(a_0, a_1) \in \Theta_4$.

3. $\exists a_2, a_3, a_4 \in A$ mit
$$a_0 \Theta_1 a_2 \Theta_2 a_3 \Theta_1 a_4 \Theta_3 a_1.$$

4. Außer $(a_0, a_2) \in \Theta_1$, $(a_3, a_4) \in \Theta_1$, $(a_2, a_3) \in \Theta_2$, $(a_4, a_1) \in \Theta_3$ und $(a_0, a_1) \in \Theta_4$ tragen alle anderen Paare $(x, y) \in \Theta_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, nichts zu $(a_0, a_1) \in \Phi$ bei. Nur diese Elemente müssen unbedingt in Relation zueinander stehen. Für $(a_0, a_1) \in \Phi^m$ würde es also genügen die Relationen $\Theta(a_0, a_2; a_3, a_4) \leq \Theta_1$, $\Theta(a_2, a_3) \leq \Theta_2$, $\Theta(a_4, a_1) \leq \Theta_3$ und $\Theta(a_0, a_1) \leq \Theta_4$ statt der Θ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, zu betrachten.

Der $(\zeta^m; u, v)$-Algorithmus, $m \in \mathbf{N}$, $u, v \in E$, ist rekursiv definiert:

Schritt 0: Setze $\zeta_1 := \zeta^m$ und bilde den Ausdruck $(u, v) \in \zeta_1$.

Schritt n: (a) Wurde der Ausdruck $(x, y) \in \zeta_n$, $n \in \mathbf{N}$, $x, y \in E$, schon gebildet und ist ζ_n von der Form $\zeta_n = \sigma \wedge \tau$, σ, τ Teilterme, dann setze $\zeta_i := \sigma$ und $\zeta_{i+1} := \tau$. Dabei sei $i \neq 0$ die kleinste natürliche Zahl, die noch nicht als Teiltermindex aufgetreten ist. Weiters bildet man $(x, y) \in \zeta_i$ und $(x, y) \in \zeta_{i+1}$.

(b) Wurde $(x, z) \in \zeta_n$ schon gebildet und ist $\zeta_n = \sigma \circ \tau$, dann definiert man ζ_i, ζ_{i+1} wie in (a) und bildet $(x, y) \in \zeta_i$ und $(y, z) \in \zeta_{i+1}$. Dabei sei y die kleinste Variable aus E, die noch nicht in einem Variablenpaar aufgetreten ist.

Für eine Variable χ in ζ bezeichnet man nun mit $E(\chi)$ die Menge aller Variablen $x, y \in E$, für die mit Hilfe des $(\zeta^m; u, v)$-Algorithmus $(x, y) \in \chi$ gebildet werden kann. Die Variablenpaare (x, y) mit $(x, y) \in \chi$ erzeugen in $E(\chi)$ eine Äquivalenzrelation, deren Klassen man als Teilmengen von E sich lexikographisch angeordnet denkt $\{x_{11}, \ldots, x_{1s_1}\}, \ldots, \{x_{t1}, \ldots, x_{ts_t}\}$. Nun definiert man den Ausdruck

$$\chi_{(\zeta^m; u,v)} := \Theta(x_{11}, \ldots, x_{1s_1}; \ldots; x_{t1}, \ldots, x_{ts_t}).$$

Ist η ein Term, der mit $\vee, \wedge, \circ$ gebildet wurde, und in dem *dieselben Variablen* wie in ζ auftreten, dann bezeichnet man mit $\eta_{(\zeta^m; u,v)}$ jenen Term, den man erhält, wenn man jede Variable χ in η durch $\chi_{(\zeta^m; u,v)}$ ersetzt.

Beispiel 3.5 Sei ζ der Ausdruck, den man erhält, wenn man in Φ aus Beispiel 3.4 Θ_i durch χ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, ersetzt. Sei $E := \{c_0, c_1, \ldots\}$. Der $(\zeta^3; c_0, c_1)$-Algorithmus führt, setzt man in Beispiel 3.4 c_i statt a_i zu folgenden Klassen:

$$\begin{aligned} E(\chi_1) &: \{c_0, c_2\}, \{c_3, c_4\}, \\ E(\chi_2) &: \{c_2, c_3\}, \\ E(\chi_3) &: \{c_4, c_1\}, \\ E(\chi_4) &: \{c_0, c_1\}. \end{aligned}$$

Ist η z.B. gleich $(\chi_1 \wedge \chi_4) \vee (\chi_2 \wedge \chi_4) \vee (\chi_3 \wedge \chi_4)$, dann ist $\eta_{(\zeta^3; c_0, c_1)} := (\Theta(c_0, c_2; c_3, c_4) \wedge \Theta(c_0, c_1)) \vee (\Theta(c_2, c_3) \wedge \Theta(c_0, c_1)) \vee (\Theta(c_4, c_1) \wedge \Theta(c_0, c_1))$. $\eta_{(\zeta^3; c_0, c_1)}$ ist also ein Term in Variablen aus E, gebildet mit $\vee, \wedge, \circ$ und einem neuen „Operator“ Θ.

Lemma 3.6 *Sind ζ und η Terme in den Operationen $\vee, \wedge$ und $\circ$, und enthalten sie dieselben Variablen aus C, dann ist für eine Algebra $\mathbf{A}$ die Ungleichung $\zeta \leq \eta$ genau dann gültig in $Con\mathbf{A}$, wenn für jede Interpretation der Variablen aus E mit Elementen aus A und jede natürliche Zahl m eine Zahl $n \in \mathbf{N}$ existiert, mit:*

$$(\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\eta^n_{(\zeta^m; u,v)}).$$

Dabei wird Θ in $\eta^n_{(\zeta^m; u,v)}$ wie in Definition 1.13 interpretiert.

Beweis: Sei ι eine Interpretation von E mit Elementen aus A und $m \in \mathbf{N}$. Der $(\zeta^m; u, v)$-Algorithmus wurde so konstruiert, daß $(\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\zeta_{(\zeta^m;u,v)})$ gilt. Das beweist man mit vollständiger Induktion nach der Stufe der Terme. Für $\zeta = \chi$, $\chi \in C$, ist die Aussage richtig. Sei nun $\zeta = \zeta_1 * \zeta_2$, wobei $*$ für $\vee, \wedge$ oder $\circ$ steht.

Für $* = \wedge, \circ$ ist $\zeta^m = \zeta_1^m * \zeta_2^m$. Für $* = \wedge$ wird $(u, v) \in \zeta_1^m$ und $(u, v) \in \zeta_2^m$ gebildet und dann der $(\zeta_1^m; u, v)$- bzw. der $(\zeta_2^m; u, v)$-Algorithmus durchgeführt. Dann gilt $\zeta_{(\zeta^m;u,v)} = (\zeta_1)_{(\zeta_1^m;u,v)} \wedge (\zeta_2)_{(\zeta_1^m;u,v)}$ und mit der Induktionsvoraussetzung erhält man $(\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\zeta_{(\zeta^m;u,v)})$.

Für $* = \circ$ wird zu Beginn des Algorithmus eine neue Variable $c \in E$ eingeführt, wobei $(u, c) \in \zeta_1^m$ und $(c, v) \in \zeta_2^m$ gebildet wird. Dann wird der $(\zeta_1^m; u, c)$- bzw. der $(\zeta_2^m; c, v)$-Algorithmusdurchgeführt. Es gilt $\zeta_{(\zeta^m;u,v)} = (\zeta_1)_{(\zeta_1^m;u,c)} \circ (\zeta_2)_{(\zeta_1^m;c,v)}$. Da $(u, c) \in \zeta_1^m$ und $(c, v) \in \zeta_2^m$ gebildet wurden, und mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung, folgt wieder $(\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\zeta_{(\zeta^m;u,v)})$.

Für $* = \vee$ ist $\zeta^m = \zeta_1^m \circ \zeta_2^m \circ \ldots$, wobei rechts m Faktoren stehen. Analog zu $* = \circ$ werden zu Beginn m neue Variablen $c_1, \ldots, c_m$ eingeführt und die entsprechenden Ausdrücke $(c_i, c_{i+1}) \in \zeta_1^m$ bzw. $(c_i, c_{i+1}) \in \zeta_2^m$, $i = 0, \ldots, m$, $c_0 := u$, $c_{m+1} := v$, gebildet. Wieder erhält man die gewünschte Aussage.

Sei $\zeta \leq \eta$ gültig in $Con\mathbf{A}$. Dann erhält man speziell $\iota(\zeta_{(\zeta^m;u,v)}) \leq \iota(\eta_{(\zeta^m;u,v)})$ und damit $(\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\eta_{(\zeta^m;u,v)})$. Wegen Satz 1.12 gilt $\iota(\eta_{(\zeta^m;u,v)}) = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} \iota(\eta^i_{(\zeta^m;u,v)})$. Daher existiert eine natürliche Zahl n mit $(\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)})$.

Zum Beweis der Umkehrung sei τ eine beliebige Interpretation der Variablen aus C mit Elementen aus $Con\mathbf{A}$. Sei $(a, b) \in \tau(\zeta)$. Dann gibt es wegen Satz 1.12 eine natürliche Zahl m mit $(a, b) \in (\tau(\zeta))^m$ und daher (vgl. Beispiel 3.4) eine Interpretation $\iota : E \to A$ mit:

$$\iota(u) = a, \quad , \iota(v) = b, \quad , \iota(\chi_{(\zeta^m;u,v)}) \leq \tau(\chi).$$

Nach Voraussetzung gilt $(a, b) = (\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)})$ für ein geeignetes $n \in \mathbf{N}$ und damit $(a, b) \in \tau(\eta)$. Da τ beliebig war, ist $\zeta \leq \eta$ in $Con\mathbf{A}$ gültig. $\square$

Die Bedingung aus obigem Lemma läßt sich nun weiter umwandeln. Man betrachtet weiter die Ungleichung $\zeta \leq \eta$, wobei ζ und η dieselbe Variablenmenge haben. Zu $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ führt man den $(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)}; u, v)$-Algorithmus durch, wobei zusätzlich beachtet werden soll, daß die neu dazukommenden Variablen von jenen, die im $(\zeta^m; u, v)$-Algorithmus dazugekommen sind (daher in Ausdrücken der Form $\Theta(x_{11},\ldots,x_{1s_1};\ldots;x_{t1},\ldots,x_{ts_t})$ auftreten) verschieden sind. Dann bildet man folgende Aussage:

$$\forall x_1,\ldots,x_{i(m)}\exists y_1,\ldots,y_j,\bigwedge(x,y)\in\Theta(x_{11},\ldots,x_{1s_1};\ldots;x_{t1},\ldots,x_{ts_t}), \quad (17)$$

wobei $(x_1,\ldots,x_{i(m)})$ die Teilfolge von E bezeichnet, die aus allen in $\eta_{(\zeta^m;u,v)}$ auftretenden Variablen besteht, und $(y_1,\ldots,y_j)$ jene Teilfolge von E, die aus allen Variablen besteht, die bei Anwendung des $(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)};u,v)$-Algorithmus neu hinzukommen. Die Konjunktion in (17) läuft über alle Paare $(x,y)\in E\times E$, für die $(x,y)\in\Theta(x_{11},\ldots,x_{1s_1};\ldots;x_{t1},\ldots,x_{ts_t})$ mit dem $(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)};u,v)$-Algorithmus ableitbar ist. Die y_i aus (17) sind also, bei Interpretation in einer Algebra $\mathbf{A}$, genau jene Elemente, die „nötig“ sind, um $(\iota(u),\iota(v))\in\iota(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)})$ zu ermöglichen.

Man sagt (17) gilt in einer Algebra $\mathbf{A}$ für eine Elementefolge $a_1,\ldots,a_{i(m)}$, wenn (17) für $x_i:=a_i$, $i=1,\ldots,i(m)$, gilt, wobei man $\exists y_1,\ldots,y_j$ durch $\exists y_1,\ldots,y_j\in A$ ersetzt und $\Theta(x_{11},\ldots,x_{1s_1};\ldots;x_{t1},\ldots,x_{ts_t})$ wie in Definition 1.13 interpretiert.

Für den Fall, daß ζ und η nicht diesselbe Variablenmenge besitzen, formt man ζ und η folgendermaßen um: Sind $\chi_1,\ldots,\chi_k$ jene Variablen in η, die nicht in ζ auftreten, dann ersetze die erste Variable χ in ζ durch den Term $\chi\wedge(\chi\vee(\chi_1\vee(\ldots\vee\chi_n)))$ und bezeichne den neuen Term mit $\bar{\zeta}$. Analog bildet man $\bar{\eta}$. Dann haben $\bar{\zeta}$ und $\bar{\eta}$ dieselbe Variablenmenge, wobei bei Interpretation der Variablen mit Elementen aus $Con\mathbf{A}$ die Terme $\bar{\zeta}$ und $\bar{\eta}$ aufgrund des Verschmelzungsgesetzes dasselbe liefern wie ζ und η. Man kann also für die Frage der Gültigkeit der Ungleichung $\zeta\leq\eta$ ebenso die Ungleichung $\bar{\zeta}\leq\bar{\eta}$ betrachten und damit (17) bilden.

Lemma 3.7 *Für eine Algebra* $\mathbf{A}$ *ist die Ungleichung* $\zeta\leq\eta$ *genau dann gültig in* $Con\mathbf{A}$*, wenn zu jeder natürlichen Zahl* m *und jeder Elementefolge* $a_1,\ldots,a_{i(m)}$ *aus* $\mathbf{A}$ *eine natürliche Zahl* n *existiert, sodaß Aussage* (17) *in* $\mathbf{A}$ *für* a_i, $i=1,\ldots,i(m)$, *gilt.*

Beweis: O.B.d.A. kann man von Termen ζ und η ausgehen, die dieselbe Variablenmenge besitzen. Das Lemma folgt aus Lemma 3.6, wenn man zeigen kann, daß für jedes Paar $(m,n)\in\mathbf{N}$ $(\iota(u),\iota(v))\in\iota(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)})$ äquivalent zur Gültigkeit von (17) in $\mathbf{A}$ für $\iota x_1,\ldots,\iota x_{i(m)}$ ist. Man beweist diese Aussage mit vollständiger Induktion nach dem Aufbau von $\eta^n_{(\zeta^m;u,v)}$. Ist $\eta^n=\chi$, daher

$\eta^n_{(\zeta^m;u,v)} = \Theta(x_{11}, \dots, x_{1s_1}; \dots; x_{t1}, \dots, x_{ts_t})$, dann wird beim $(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)}; u, v)$-Algorithmus nur $(u,v) \in \Theta(x_{11}, \dots, x_{1s_1}; \dots; x_{t1}, \dots, x_{ts_t})$ gebildet und (17) gilt dann offensichtlich in $\mathbf{A}$ für $\iota x_1, \dots, \iota x_{i(m)}$ genau dann, wenn $(\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)})$ gilt.

Sei $\eta^n_{(\zeta^m;u,v)} = \tau^n_{(\zeta^m;u,v)} * \sigma^n_{(\zeta^m;u,v)}$, mit $* = \wedge$ oder $\circ$ ($\vee$ kann in η^n nicht auftreten). Im Fall $* = \wedge$ wird im $(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)}; u, v)$-Algorithmus zu Beginn $(u,v) \in \sigma^n_{(\zeta^m;u,v)}$ und $(u,v) \in \tau^n_{(\zeta^m;u,v)}$ gebildet. Mit der Induktionsvoraussetzung gilt aber, daß $(\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\tau^n_{(\zeta^m;u,v)})$ äquivalent zum Erfülltsein von (17) in $\mathbf{A}$ für $\iota x_1, \dots, \iota x_{i(m)}$ ist, analog für $\sigma^n_{(\zeta^m;u,v)}$. Dabei sei j_τ bzw. j_σ der jeweils zugehörige Index in der Folge der y_i, $i = 1, \dots, j_\tau$ bzw. j_σ. $(\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)})$ ist daher ebenfalls äquivalent zu (17), wobei als neuer Index $j = j_\tau + j_\sigma$ auftritt.

Für $* = \circ$ wird zu Beginn des $(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)}; u, v)$-Algorithmus $(u,c) \in \sigma^n_{(\zeta^m;u,v)}$ und $(c,v) \in \tau^n_{(\zeta^m;u,v)}$, $c \in E$, gebildet. Wieder ist $(\iota(u), \iota(c)) \in \iota(\tau^n_{(\zeta^m;u,v)})$ äquivalent zum Erfülltsein von (17) in $\mathbf{A}$ für $\iota x_1, \dots, \iota x_{i(m)}$, analog für $\sigma^n_{(\zeta^m;u,v)}$. Die Indizes j_τ, j_σ seien so wie oben definiert. $(\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)})$ ist äquivalent zur Aussage

$$\exists y \in A, (\iota(u), y) \in \iota(\tau^n_{(\zeta^m;u,v)}), (y, \iota(v)) \in \iota(\sigma^n_{(\zeta^m;u,v)}).$$

Setzt man $y := \iota(c)$, dann ist $(\iota(u), \iota(v)) \in \iota(\eta^n_{(\zeta^m;u,v)})$ äquivalent zu (17). Als neuer Index tritt $j = j_\tau + j_\sigma + 1$ auf (+1 wegen $\iota(c)$). $\square$

Es bleibt nur noch, die Bedingung des obigen Lemmas in Gleichungen umzuwandeln, deren Erfülltsein zur Gültigkeit von $\zeta \leq \eta$ in einer Varietät $\mathcal{V}$, d.h. in jeder Algebra $\mathbf{A}$ aus $\mathcal{V}$, äquivalent ist.

Satz 3.8 *Für eine Varietät $\mathcal{V}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *(i) Die Ungleichung $\zeta \leq \eta$ gilt in $\mathcal{V}$.*
- *(ii) Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es ein $n_m \in \mathbf{N}$, sodaß* (17) *in $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_{i(m)})$ für $x_1, \dots, x_{i(m)}$ erfüllt ist (dabei ist $n := n_m$).*
- *(iii) Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es ein $n_m \in \mathbf{N}$, sodaß* (17) *für $n := n_m$ in allen Algebren von $\mathcal{V}$ erfüllt ist.*

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Folgt aus Lemma 3.7.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $\mathbf{A}$ eine Algebra aus $\mathcal{V}$, $m \in \mathbf{N}$ und $a_1, \dots, a_{i(m)} \in A$. Wegen (ii) existiert ein n_m, sodaß (17) in $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_{i(m)})$ für $x_1, \dots, x_{i(m)}$

erfüllt ist. Man betrachtet den Homomorphismus $\phi : \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_{i(m)}) \to \mathbf{A}$ mit $\phi(x_i) := a_i$, $i = 1, \ldots, i(m)$. Da Homomorphismen mit einstelligen Polynomen vertauschen und wegen Satz 1.31 gilt (17) auch in $\mathbf{A}$ für $a_1, \ldots, a_{i(m)}$ mit diesem n_m. Da $a_1, \ldots, a_{i(m)}$ beliebig waren, gilt (17) in $\mathbf{A}$.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*: Folgt aus Lemma 3.7. □

Obige Bedingung *(ii)* kann man folgendermaßen in Gleichungen übersetzen:

Satz 3.9 *Für ein Paar* $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *gilt* (17) *genau dann in* $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_{i(m)})$ *für* $x_1, \ldots, x_{i(m)}$, *wenn für jeden Ausdruck* $(p(x_1, \ldots, x_{i(m)}), q(x_1, \ldots, x_{i(m)})) \in \Theta(x_{11}, \ldots, x_{1s_1}; \ldots; x_{t1}, \ldots, x_{ts_t})$, *der in* (17) *auftritt folgende Gleichung erfüllt ist:*

$$p(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i(m)}) = q(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i(m)}),$$

wobei

$$\bar{x}_i := \begin{cases} x_i & x_i \notin \{x_{11}, \ldots, x_{ts_t}\}, \\ x_{11} & x_i \in \{x_{11}, \ldots, x_{1s_1}\}, \\ & \vdots \\ x_{t1} & x_i \in \{x_{t1}, \ldots, x_{ts_t}\}, \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, i(m)$, *gilt.*

Beweis: Es gelte (17) in $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_{i(m)})$ für $x_1, \ldots, x_{i(m)}$ und n_m. Sei $(p(x_1, \ldots, x_{i(m)}), q(x_1, \ldots, x_{i(m)})) \in \Theta(x_{11}, \ldots, x_{1s_1}; \ldots; x_{t1}, \ldots, x_{ts_t})$ einer der Ausdrücke in der Konjunktion von (17). Wegen Lemma 2.2 ist das äquivalent zur obigen Gleichung. □

Bemerkung 3.10 Der Wille-Algorithmus liefert also eine Menge von Gleichungen, deren Erfülltsein in einer Varietät $\mathcal{V}$ zur Ungleichung $\zeta \leq \eta$ äquivalent ist. Allerdings muß diese Menge nicht endlich sein. Ist die Menge der Gleichungen nicht endlich, dann nennt man das eine **schwache Mal'cev-Bedingung**. Sie ist für eine Ungleichung U dann endlich, wenn man zeigen kann, daß (ii) aus Satz 3.8 nur für ein $m(U)$ gelten braucht. Im Fall, daß ζ nur mit $\wedge$ und $\circ$ gebildet ist, kann man $m(U) = 0$ wählen, da (17) nicht von m abhängt. Im Fall, daß $\mathcal{V}$ kongruenzvertauschbar ist, kann wegen $\Theta \circ \Phi = \Theta \vee \Phi$ $m(U) = 2$ gewählt werden, da (17) sich für $m \geq 3$ nicht mehr ändert und $\zeta^1 \leq \zeta^2$ gilt.

3.2 n-Vertauschbarkeit

Als Anwendung des Wille-Algorithmus soll die n-Vertauschbarkeit in Varietäten behandelt werden.

Definition 3.11 Sei $\zeta := \chi_1 \vee \chi_2$ und $\eta := \chi_2 \vee \chi_1$. Eine Algebra $\mathbf{A}$ heißt n**-vertauschbar**, $n \geq 2$, wenn $\zeta^n \leq \eta^n$ in $Con\mathbf{A}$ gilt. Eine Varietät heißt n**-vertauschbar**, wenn jede Algebra n-vertauschbar ist.

Bemerkung 3.12 Ist eine Varietät n-vertauschbar, dann gilt in einer Algebra $\mathbf{A}$ aus $\mathcal{V}$ $\Theta \vee \Phi = \Theta \circ \Phi \circ \ldots$, $\Theta, \Phi \in Con\mathbf{A}$, wobei rechts n Faktoren stehen. $m(U)$ aus Bemerkung 3.10 kann also gleich n gewählt werden.

Folgendes Schema veranschaulicht den Algorithmus, wobei in den Zeilen die Paare stehen, die im jeweiligen Algorithmusschritt gebildet werden:

$(\zeta^n; x_0, x_n)$-Algorithmus:

$$\begin{array}{llllll}
\zeta^n = & \chi_1 \circ & (\chi_2 \circ & (\chi_1 \circ & \ldots &)) \\
0. & (x_0, & & & & x_n) \\
1. & (x_0, x_1) & (x_1, & & & x_n) \\
2. & (x_0, x_1) & (x_1, x_2) & (x_2, & & x_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
n-1. & (x_0, x_1) & (x_1, x_2) & (x_2, x_3) & \ldots & (x_{n-1}, x_n)
\end{array}$$

$(\eta^n_{(\zeta^n; x_0, x_n)}; x_0, x_n)$-Algorithmus:

$$\begin{array}{llllll}
\eta^n_{(\zeta^n; x_0, x_n)} = & \Theta(x_1, x_2; x_3, x_4; \ldots) \circ & (\Theta(x_0, x_1; x_2, x_3; \ldots) \circ & (\Theta(x_1, x_2; x_3, x_4; \ldots) \circ & \ldots &)) \\
0. & (x_0, & & & & x_n) \\
1. & (x_0, y_1) & (y_1, & & & x_n) \\
2. & (x_0, y_1) & (y_1, y_2) & (y_2, & & x_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
n-1. & (x_0, y_1) & (y_1, y_2) & (y_2, y_3) & \ldots & (y_{n-1}, x_n)
\end{array}$$

Eine Varietät $\mathcal{V}$ ist wegen Satz 3.8 daher genau dann n-vertauschbar, wenn in jeder Algebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ für $i = 0, \ldots, n-1$ folgende Aussage gilt.

$$\forall a_0, \ldots, a_n \in A \quad \exists b_0, \ldots, b_n \in A \text{ mit:}$$
$$\bigwedge_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ \begin{array}{ll} (b_i, b_{i+1}) \in \Theta(x_0, x_1; x_2, x_3; \ldots) & i \text{ ungerade,} \\ (b_i, b_{i+1}) \in \Theta(x_1, x_2; x_3, x_4; \ldots) & i \text{ gerade} \end{array} \right\}, \tag{18}$$

wobei $b_0 := a_0$ und $b_n := a_n$ gesetzt ist.

Mit Satz 3.9 erhält man

Satz 3.13 *Eine Varietät $\mathcal{V}$ ist genau dann n-vertauschbar, wenn es $(n+1)$-stellige Terme $p_0, \ldots, p_n$ gibt, sodaß in allen Algebren $\mathbf{A}$ aus $\mathcal{V}$ folgende Gleichungen erfüllt sind:*

$$\begin{aligned} p_0(x_0, \ldots, x_n) &= x_0, \\ p_i(x_0, x_0, x_2, x_2, \ldots) &= p_{i+1}(x_0, x_0, x_2, x_2, \ldots) \quad i \text{ ungerade}, \\ p_i(x_0, x_1, x_1, x_3, x_3, \ldots) &= p_{i+1}(x_0, x_1, x_1, x_3, x_3, \ldots) \quad i \text{ gerade}, \\ p_n(x_0, \ldots, x_n) &= x_n. \end{aligned}$$

Als Anwendung dieses Satzes erhält man, daß in jeder nicht trivialen Varietät $\mathcal{V}$ von Verbänden zu jeder natürlichen Zahl n Verbände existieren, deren Kongruenzrelationen nicht n-vertauschbar sind. Seien $p_0, \ldots, p_n$ die $(n+1)$-stelligen Terme aus Satz 3.13. Da $\vee$ und $\wedge$ ordnungserhaltend sind, gilt:

$$\begin{aligned} x_0 &= p_1(x_0, x_1 \wedge x_2, x_1 \wedge x_2, x_3 \wedge x_4, x_3 \wedge x_4, \ldots) \\ &\leq p_1(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ &\leq p_1(x_0, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2, x_3 \vee x_4, x_3 \vee x_4, \ldots), \end{aligned}$$

also $x_0 = p_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Es gilt $x_0 = p_i(x_0, \ldots, x_0, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$. Das zeigt man mit Induktion. Für $i = 1$ ist die Aussage richtig. Sei die Aussage schon für $i-1$ gezeigt, $i-1$ ungerade (der Fall $i-1$ gerade ist analog). Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_0 &= p_i(x_0, \ldots, x_0, x_i \wedge x_{i+1}, x_i \wedge x_{i+1}, x_{i+2} \wedge x_{i+3}, x_{i+2} \wedge x_{i+3}, \ldots) \\ &\leq p_i(x_0, \ldots, x_0, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ &\leq p_i(x_0, \ldots, x_0, x_i \vee x_{i+1}, x_i \vee x_{i+1}, x_{i+2} \vee x_{i+3}, x_{i+2} \vee x_{i+3}, \ldots). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $x_0 = p_n(x_0, \ldots, x_0, x_n) = x_n$. Da $\mathcal{V}$ als nicht trivial vorausgesetzt war, gibt es aber zweielementige Verbände, was zu einem Widerspruch führt. Varietäten von Verbänden sind also speziell nicht kongruenzvertauschbar.

Lemma 3.14 *Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei Algebren selben Typs und $\Theta \in Con\mathbf{B}$, $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ein Homomorphismus, dann ist $\phi^{-1}\Theta := \{(a, b) \in A \times A \mid (\phi a, \phi b) \in \Theta\} \in Con\mathbf{A}$.*

Beweis: Da Θ eine Äquivalenzrelation ist, ist auch $\phi^{-1}\Theta$ eine Äquivalenzrelation. Sei f eine n-stellige Operation, und $a_1\phi^{-1}\Theta a'_1, \ldots, a_n\phi^{-1}\Theta a'_n$. Dann gilt $\phi f(a_1, \ldots, a_n) = f(\phi a_1, \ldots, \phi a_n)\Theta f(\phi a'_1, \ldots, \phi a'_n) = \phi f(a'_1, \ldots, a'_n)$. $\square$

Definition 3.15 Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Algebren, $\Theta \in Con\mathbf{A}$ und $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ein Homomorphismus, dann setzt man $\phi\Theta := \{(\phi a, \phi b) \mid (a, b) \in \Theta\}$.

Satz 3.16 *Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(*i*) *Jeder Epimorphismus zwischen Algebren aus $\mathcal{V}$ bildet Kongruenzrelationen auf Kongruenzrelationen ab.*

(*ii*) *Für jeden Epimorphismus ϕ zwischen Algebren aus $\mathcal{V}$ gilt $\phi\Theta(X_1, \ldots, X_n) = \Theta(\phi X_1, \ldots, \phi X_n)$.*

(*iii*) *$\mathcal{V}$ ist 3-vertauschbar.*

(*iv*) *Es gibt 4-stellige Terme p, q, sodaß in allen Algebren aus $\mathcal{V}$*

$$p(x, y, y, z) = x, \quad p(x, x, z, z) = q(x, x, z, z), \quad q(x, y, y, z) = z$$

gilt.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in\mathcal{V}$, $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ein Epimorphismus und $M_1, \ldots, M_n \subseteq A$. Wegen (i) ist $\phi\Theta(M_1, \ldots, M_n)$ eine Kongruenzrelation und daher gilt $\Theta(\phi M_1, \ldots, \phi M_n) \leq \phi\Theta(M_1, \ldots, M_n)$. Wegen obigem Lemma ist auch $\phi^{-1}\Theta(\phi M_1, \ldots, \phi M_n)$ eine Kongruenzrelation und es gilt $\Theta(M_1, \ldots, M_n) \leq \phi^{-1}\Theta(\phi M_1, \ldots, \phi M_n)$. Daraus folgt $\phi\Theta(M_1, \ldots, M_n) \leq \Theta(\phi M_1, \ldots, \phi M_n)$ und damit (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $\mathbf{A}\in\mathcal{V}$, $\Theta, \Phi \in Con\mathbf{A}$, ϕ der kanonische Epimorphismus von $\mathbf{A}$ auf $\mathbf{A}/\Phi$ und $(a, d) \in \Theta \circ \Phi \circ \Theta$. Es gibt also $b, c \in A$ mit $a\Theta b\Phi c\Theta d$. Aus (ii) folgt $\phi\Theta(a, b; c, d) = \Theta(\phi a, \phi b; \phi c, \phi d)$ und wegen $b\Phi c$ ist $\Theta(\phi a, \phi b; \phi c, \phi d) = \Theta(\phi a, \phi b, \phi d)$. Da $\Theta(a, b; c, d) \leq \Theta$ ist, ist $(\phi a, \phi d) \in \phi\Theta$. Daher existiren a', d' mit $a'\Theta d'$ und $\phi a = \phi a'$, $\phi d = \phi d'$ und damit $a\Phi a'\Theta d'\Phi d$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Für $\mathbf{A}\in\mathcal{V}$ und beliebiges $\Phi \in Con\mathbf{A}$ sei $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\Phi$ der kanonische Epimorphismus mit $\ker\phi = \Phi$. Da nach dem Homomorphiesatz alle homomorphen Bilder von der Form $\mathbf{A}/\Phi$ sind, folgt (i), wenn man für alle $\Theta \in Con\mathbf{A}$ zeigen kann, daß $\phi\Theta \in Con(\mathbf{A}/\Phi)$ gilt. Reflexiviät und Symmetrie übertragen sich von Θ auf $\phi\Theta$. Die Verträglichkeit mit den fundmentalen Operationen folgt wie in Lemma 3.14 aus der Homomorphiebedingung. Es bleibt nur die Transitivität von $\phi\Theta$ zu zeigen. Sei also $x(\phi\Theta)y(\phi\Theta)z$. Es gibt also Elemente $a, b, c, d \in A$ mit $(a, b) \in \Theta$, $(c, d) \in \Theta$, $\phi a = x$, $\phi b = \phi c = y$ und $\phi d = z$. Aus $\phi b = \phi c$ folgt $(a, d) \in \Theta \circ \Phi \circ \Theta \leq \Phi \circ \Theta \circ \Phi$, weshalb es Elemente $a', d' \in A$ gibt mit $a\Phi a'\Theta d'\Phi d$. Daraus folgt aber $(\phi a, \phi d) = (x, z) \in \phi\Theta$.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$: Folgt aus Satz 3.13. $\square$

4 Lokale Mal'cev-Bedingungen

4.1 Arithmetizität

Dieser Abschnitt befaßt sich mit der lokalen Charakterisierung arithmetischer Algebren von Pixley [12] im Gegensatz zur globalen Charakterisierung arithmetischer Varietäten. Es stellt sich heraus, daß sich formal dieselbe Bedingung wie in Satz 2.12 ergibt.

Alle Verbände, die im folgenden betrachtet werden, seien *endlich*.

Definition 4.1 Ein Verband $\mathbf{V}$ heißt **semimodular nach unten**, wenn zwei Elemente $x, y \in \mathbf{V}$, die einen gemeinsamen oberen Nachbarn b haben, auch einen gemeinsamen unteren Nachbarn a haben.

Definition 4.2 Eine Elementefolge $a_0, \ldots, a_n$ in einem Verband heißt **Kette**, falls $a_i > a_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$, gilt. Eine Kette heißt **maximal**, wenn die Elemente der Kette alle Nachbarn sind. n nennt man die **Länge** der Kette.

In semimodularen Verbänden gilt der Dedekindsche Kettensatz [3]:

Satz 4.3 *Ist* $\mathbf{V}$ *ein nach unten semimodularer Verband, dann haben je zwei maximale Ketten zwischen zwei Elementen* $a, b \in V$ *die gleiche Länge.*

Beweis: Der Beweis wird mit vollständiger Induktion nach der Kettenlänge geführt. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei für Ketten mit Länge$<n$ die Aussage bewiesen. Wir betrachten zwei maximale Ketten

$$\begin{aligned} K_1 &: \; b = x_0 > x_1 > \ldots > x_{n-1} > x_n = a \\ K_2 &: \; b = y_0 > x_1 > \ldots > x_{m-1} > x_m = a \end{aligned}$$

zwischen a und b. Ist $x_1 = y_1$, dann folgt die Behauptung sofort aus der Induktionsvoraussetzung. Ist $x_1 \neq y_1$, dann haben sie den gemeinsamen oberen Nachbarn b und daher wegen der Semimodularität auch einen gemeinsamen unteren Nachbarn $z_2 \geq a$. Da $\mathbf{V}$ ein endlicher Verband ist, existiert eine maximale Kette $z_2 > z_3 > \ldots > a$. Die Kette $x_1 > x_2 > \ldots > a$ hat Länge $n-1$ und nach Induktionsvoraussetzung auch die Kette $x_1 > z_2 > \ldots > a$. Daher hat die Kette $z_2 > z_3 > \ldots > a$ Länge $n-2$ und die Kette $y_1 > z_2 > \ldots > a$ Länge $n-1$. Daraus folgt, daß K_2 Länge n hat. $\square$

Daher ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 4.4 Sei $\mathbf{V}$ semimodular nach unten. Da $\mathbf{V}$ endlich und damit vollständig ist, gibt es ein kleinstes Element 0 in $\mathbf{V}$. Ist x ein beliebiges Element aus $\mathbf{V}$, dann bezeichnet man die Länge einer maximalen Kette zwischen 0 und x als die **Höhe** von x.

Satz 4.5 *Jeder modulare Verband* $\mathbf{V}$ *ist auch semimodular nach unten.*

Beweis: Angenommen $\mathbf{V}$ wäre nicht semimodular nach unten. Daher gibt es $x, y \in V$ mit einem gemeinsamen oberen Nachbarn $x \vee y = b$, die keinen gemeinsamen unteren Nachbarn haben. Es gibt also o.B.d.A. ein $z \in V$ mit:

$$x > z > (x \wedge y). \tag{19}$$

Daraus folgt $y \leq y \vee z \leq y \vee x = b$. Da b oberer Nachbar von y ist, gilt entweder $y \vee z = y$ oder $y \vee z = b$. Aus $y \vee z = y$ folgt $y > z$ und daher $x \wedge y \geq z$ im Widerspruch zu (19). Daher gilt $y \vee z = b$ und damit $x \wedge (y \vee z) = x > z = (x \wedge y) \vee z$ im Widerspruch zur Modularität von $\mathbf{V}$. Daher ist $\mathbf{V}$ semimodular nach unten. □

Lemma 4.6 *Eine Algebra* $\mathbf{A}$ *ist dann und nur dann arithmetisch, wenn für jede endliche Menge* $\Theta_1, \ldots, \Theta_n \in Con\mathbf{A}$ *und Elemente* $x_1, \ldots, x_n \in A$ *mit*

$$(x_i, x_j) \in (\Theta_i \vee \Theta_j), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

ein $x \in A$ *existiert mit*

$$(x, x_i) \in \Theta_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Beweis: Sei $\mathbf{A}$ arithmetisch. Wir beweisen die Aussage mit Induktion nach n. Sei $n = 2$, daher $(x_1, x_2) \in (\Theta_1 \vee \Theta_2) = \Theta_1 \circ \Theta_2$ wegen der Kongruenzvertauschbarkeit. Es gibt also ein $x \in A$ mit $x_1 \Theta_1 x \Theta_2 x_2$, was gleichbedeutend ist mit (20). Sei nun vorausgesetzt, daß die Aussage für $n - 1$ bewiesen ist. Wir betrachten $\Theta_1, \ldots, \Theta_{n+1}$ und $x_1, \ldots, x_{n+1}$ mit $(x_i, x_j) \in (\Theta_i \vee \Theta_j)$, $i, j = 1, \ldots, n+1$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Elemente $y, z \in A$ mit $(y, x_i) \in \Theta_i$, $i = 1, \ldots, n$, und $(z, x_j) \in \Theta_j$, $j = 2, \ldots, n+1$. Wegen $y \Theta_1 x_1 (\Theta_1 \vee \Theta_{n+1}) x_{n+1} \Theta_{n+1} z$ und $y \Theta_i x_i \Theta_i z$, $i = 2, \ldots, n$, gilt:

$$(y, z) \in \Theta_2 \wedge \ldots \wedge \Theta_n \wedge (\Theta_1 \vee \Theta_{n+1}).$$

Aus der Kongruenzdistributivität folgt $(y, z) \in (\Theta_1 \wedge \ldots \wedge \Theta_n) \vee (\Theta_2 \wedge \ldots \wedge \Theta_{n+1})$ und mit Hilfe der Vertauschbarkeit erhält man:

$$\begin{aligned} \exists x \in A, \qquad & x\Theta_i y \Theta_i x_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ & x\Theta_{n+1} z \Theta_{n+1} x_{n+1} \end{aligned}$$

und damit (20).

Sei nun obige Bedingung erfüllt. Zu zeigen ist die Arithmetizität von $\mathbf{A}$. Wir betrachten $\Theta, \Phi \in Con\mathbf{A}$ und $(a, c) \in (\Theta \vee \Phi)$. Nach Voraussetzung gibt es ein Element $b \in A$ mit $a\Theta b \Phi c$. Es gilt also $(\Theta \vee \Phi) \leq (\Theta \circ \Phi)$ und wegen $(\Phi \circ \Theta) \leq (\Theta \vee \Phi)$ die Kongruenzvertauschbarkeit. Sei $(a, b) \in \Theta \wedge (\Phi \vee \Psi)$, $\Theta, \Phi, \Psi \in Con\mathbf{A}$. Setzt man $x_1 := x_2 := a$, $x_3 := x_4 := b$ und $\Theta_1 := \Theta_4 := \Theta$, $\Theta_2 := \Phi$, $\Theta_3 := \Psi$, dann gilt $(x_i, x_j) \in (\Theta_i \vee \Theta_j)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Es gibt also ein $x \in A$ mit $(x, a) \in (\Theta \wedge \Phi)$ und $(x, b) \in (\Theta \wedge \Psi)$. Daraus folgt $(a, b) \in (\Theta \wedge \Phi) \circ (\Theta \wedge \Psi) = (\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)$ und damit die Distributivität von $Con\mathbf{A}$. □

Satz 4.7 *Ist* $\mathbf{A}$ *eine Algebra und* $Con\mathbf{A}$ *endlich, dann ist* $\mathbf{A}$ *genau dann arithmetisch,wenn eine Funktion* $f : \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}$ *existiert, die mit allen Kongruenzrelationen von* $\mathbf{A}$ *verträglich ist, und die für alle* $x, z \in A$

$$f(x, x, z) = f(z, x, x) = f(z, x, z) = z \tag{21}$$

erfüllt.

Beweis: Da $Con\mathbf{A}$ distributiv ist, gilt der Dedekindsche Kettensatz. Zur Abkürzung bezeichne $P(n)$ die folgende Aussage: für jede Kongruenzrelation Θ mit Höhe$\geq n$ in $Con\mathbf{A}$ gibt es eine Funktion $f_\Theta : (\mathbf{A}/\Theta)^3 \to \mathbf{A}/\Theta$, die (21) auf $\mathbf{A}/\Theta$ erfüllt und ist $\Theta \leq \Phi$ dann gilt für alle $x, y, z \in A$:

$$f_\Theta([x]\Theta, [y]\Theta, [z]\Theta) \subseteq f_\Phi([x]\Phi, [y]\Phi, [z]\Phi). \tag{22}$$

Hat ∇ die Höhe m, dann gilt offensichtlich $P(m)$. Gelte $P(n)$ und sei Θ eine Kongruenzrelation der Höhe $n-1$. Seien $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ alle oberen Nachbarn von Θ (daher mit Höhe n). Für jedes Tripel $x, y, z \in A$ wähle man ein $w_i \in f_{\Theta_i}([x]\Theta_i, [y]\Theta_i, [z]\Theta_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Aus (22) folgt $(w_i, w_j) \in (\Theta_i \vee \Theta_j)$, $1 \leq i, j \leq k$. Wegen Lemma 4.6 gibt es ein $w \in A$, sodaß $(w, w_i) \in \Theta_i$, $i = 1, \ldots, k$, gilt, daher

$$[w]\Theta \subseteq [w]\Theta_i = [w_i]\Theta_i = f_{\Theta_i}([x]\Theta_i, [y]\Theta_i, [z]\Theta_i), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{23}$$

Man definiert nun $f_\Theta : (\mathbf{A}/\Theta)^3 \to \mathbf{A}/\Theta$ folgendermaßen:

$$f_\Theta([x]\Theta, [y]\Theta, [z]\Theta) := \begin{cases} [z]\Theta & [x]\Theta = [y]\Theta \text{ oder } [x]\Theta = [z]\Theta, \\ [x]\Theta & [y]\Theta = [z]\Theta, \\ [w]\Theta & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung f_Θ erfüllt (21), und wegen (23) und nach Definition von f_Θ gilt auch:

$$f_\Theta([x]\Theta, [y]\Theta, [z]\Theta) \subseteq f_{\Theta_i}([x]\Theta_i, [y]\Theta_i, [z]\Theta_i), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Gilt nun $\Theta < \Phi \in Con\mathbf{A}$, dann ist für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ $\Theta < \Theta_i \leq \Phi$ erfüllt und daher gilt (22) wegen $P(n)$. Führt man diese Konstruktion für alle Kongruenzrelationen der Höhe $n-1$ durch, erhält man die Gültigkeit der Aussage $P(n-1)$ und mit Induktion $P(0)$. Setzt man nun noch für $x, y, z \in A$ $f(x, y, z) := f_\Delta([x]\Delta, [y]\Delta, [z]\Delta)$, dann erfüllt f (21).

Sei nun $\Theta \in Con\mathbf{A}$ eine beliebige Kongruenzrelation und $(x, x') \in \Theta$, $(y, y') \in \Theta$, $(z, z') \in \Theta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\in f_\Delta([x]\Delta, [y]\Delta, [z]\Delta) \subseteq f_\Theta([x]\Theta, [y]\Theta, [z]\Theta) \text{ und} \\ f(x', y', z') &\in f_\Delta([x']\Delta, [y']\Delta, [z']\Delta) \subseteq f_\Theta([x']\Theta, [y']\Theta, [z']\Theta). \end{aligned}$$

Da $f_\Theta([x]\Theta, [y]\Theta, [z]\Theta) = f_\Theta([x']\Theta, [y']\Theta, [z']\Theta)$ gilt, folgt $(f(x, y, z), f(x', y', z')) \in \Theta$. f ist also mit allen Kongruenzrelationen verträglich.

Andererseits, existiert eine Funktion f, die mit allen Kongruenzrelationen verträglich ist, und die (21) erfüllt, dann kann man f als dreistellige fundamentale Operation hinzufügen und erhält eine neue Algebra $\mathbf{A}'$ mit $Con\mathbf{A} = Con\mathbf{A}'$. In der von $\mathbf{A}'$ erzeugten Varietät gilt nun in allen Algebren (21). Mit Hilfe von Satz 2.12 erhält man die Arithmetizität von **A**' und damit jene von **A**. $\square$

Bemerkung 4.8 Eine dreistellige Funktion f, die (21) erfüllt, nennt man analog zum Pixley-Term eine **Pixley-Funktion**. Erfüllt f die Gleichungen eines Mal'cev-Terms, dann nennt man f **Mal'cev-Funktion**.

4.2 Definition lokaler Mal'cev-Charakterisierbarkeit

Der letzte Abschnitt befaßt sich mit der Frage, welche Kongruenzengleichungen sich lokal charakterisieren lassen. Diese Frage wurde von H. P. Gumm in [6] beantwortet.

Definition 4.9 Sei S eine Menge. Dann bezeichnet man die Menge der Äquivalenzrelationen von S mit $Eq\ S$.

Bemerkung 4.10 Wie im Falle des Kongruenzrelationenverbandes einer Algebra erhält man, daß $Eq\ S$ ein vollständiger Verband ist. Das Relationenprodukt ist ebenfalls analog erklärt und es gilt auch Satz 1.12. Ein Unterverband von $Eq\ S$ heißt **arithmetisch**, wenn er distributiv ist, und $\circ$ kommutativ ist.

Betrachtet man den Beweis von Satz 4.7, dann gilt sogar folgende Aussage:

Satz 4.11 *Sei S eine Menge und $\mathbf{V}$ ein Unterverband von $Eq\ S$. $\mathbf{V}$ ist genau dann arithmetisch, wenn es eine Pixley-Funktion gibt, die mit allen Elementen aus $\mathbf{V}$ verträglich ist.*

Beweis: Ist $\mathbf{V}$ arithmetisch, dann beweist man analog zu Satz 4.7 die Existenz einer Pixley-Funktion, die mit allen Verbandselementen verträglich ist.

Gibt es eine Pixley-Funktion f, die mit allen Elementen aus $\mathbf{V}$ verträglich ist, dann ist f auch eine Mal'cev-Funktion. Da im Beweis von Satz 2.3 bei der Folgerung der Kongruenzvertauschbarkeit aus der Existenz eines Mal'cev-Terms nur die Verträglichkeit mit den Kongruenzrelationen, nicht aber die Tatsache, daß p eine Termfunktion ist, benützt wird, folgt analog aus der Existenz einer Mal'cev-Funktion die Vertauschbarkeit aller Elemente aus $\mathbf{V}$ bezüglich $\circ$. Wie in Satz 2.12 erhält man weiters aus der Pixley-Funktion eine Funktion, die die Gleichungen eines Majoritätsterms erfüllt, und folgert analog zur Vertauschbarkeit die Distributivität von $\mathbf{V}$. $\square$

Da sich Arithmetizität nach Satz 4.7 in einzelnen Algebren charakterisieren läßt, stellt sich folgende Frage: Welche Kongruenzengleichungen lassen sich auch in einzelnen Algebren mit Hilfe von Mal'cev-Bedingungen charakterisieren? Zur Präzisierung der Aufgabenstellung sind folgende Definitionen nötig:

Definition 4.12 Sei $\zeta = \eta$ eine Kongruenzengleichung und M die zugehörige (schwache) Mal'cev-Bedingung, die man mit Hilfe des Wille-Algorithmus erhält. Man nennt die Gleichung $\zeta = \eta$ **lokal stark Mal'cev charakterisierbar**, wenn es für jeden konkreten Unterverband $\mathbf{V}$von $Eq\ S$ (S endlich), in dem $\zeta = \eta$ gilt, Funktionen gibt, die mit allen Elementen von $\mathbf{V}$ verträglich sind, und die den Funktionssymbolen von M entsprechen, sodaß die Gleichungen von M erfüllt sind.

Die Gleichung $\zeta = \eta$ heißt **lokal schwach Mal'cev charakterisierbar**, wenn die obigen Bedingungen nur für den Fall $\mathbf{V} = Con\mathbf{A}$ erfüllt sind, wobei $\mathbf{A}$ eine endliche Algebra ist. Aus lokal stark Mal'cev charakterisierbar folgt offensichtlich lokal schwach Mal'cev charakterisierbar.

Bemerkung 4.13 Es genügt die Mal'cev-Bedingungen zu betrachten, die man mit Hilfe des Wille-Algorithmus erhält. In Varietäten folgt aus dem Erfülltsein einer Mal'cev-Bedingung, die eine Kongruenzgleichung charakterisiert, daß auch jede andere Mal'cev-Bedingung, die diese Gleichung charaktersisiert erfüllt ist. Bei einzelnen Algebren kann man bei schwacher oder starker Mal'cev Charaktersierbarkeit einer Gleichung, die zugehörigen Funktionen als fundamentale Operationen hinzufügen, da sie mit den Elementen aus $Con\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{V}$ verträglich sind. $Con\mathbf{A}$ wird dabei nicht verändert und im Falle der starken Mal'cev Charakterisierbarkeit entsteht eine endliche Algebra $\mathbf{S}$ mit $\mathbf{V} \subseteq Con\mathbf{S} \subseteq Eq\ S$. Betrachtet man nun die von den neuen Algebren erzeugte Varietät, dann erhält man, daß auch im Falle des Erfülltseins einer Mal'cev-Bedingung, die eine Kongruenzengleichung charaktersiert, auch jede andere Mal'cev-Bedingung, die diese Gleichung charakterisiert, erfüllt ist.

4.3 Die Algebra $\mathbf{A}_6$

Wir definieren folgende endliche Algebra $\mathbf{A}_6$, $A := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, vom Typ $(f, g; 1, 1)$. Die Operationen f und g sind folgendermaßen definiert:

$$f(x) := x + 2 (\text{mod } 6),$$
$$g(0) := g(5) := 1, \quad g(1) := g(4) := 0, \quad g(2) := g(3) := 5.$$

Man überprüft leicht, daß es nur zwei nichttriviale Kongruenzrelationen gibt, die durch folgende Partitionen gegeben sind:

$$\begin{aligned} \Theta &:= \{\{x, x+1\} \mid x \equiv 0 (\text{mod } 2)\}, \\ \Phi &:= \{\{x, x+1\} \mid x \equiv 1 (\text{mod } 2)\}, \end{aligned}$$

wobei $+$ in diesem Abschnitt immer die Addition (mod 6) bezeichnet. Es gilt $\Theta \wedge \Phi = \Delta$ und $\Theta \circ \Phi \circ \Theta = \Phi \circ \Theta \circ \Phi = \nabla$. Abbildung 1 veranschaulicht die beiden Kongruenzrelationen, wobei Paare aus Θ durch gerade und Paare aus Φ durch gewellte Linien verbunden sind. Die Pfeile zeigen die Wirkungsweise von g.

Abbildung 1: $\mathbf{A}_6$

Man untersucht nun alle Funktionen auf $\mathbf{A}_6$, die mit den Relationen Θ, Φ verträglich sind. Betrachtet man den Wille-Algorithmus, dann stellt man fest, daß alle Terme, die man in den daraus gweonnenen Mal'cev-Bedingungen erhält idempotent sind (d.h.: $f(x, \ldots, x) = x$). Da nur Funktionen interessieren, die als Funktionen in Mal'cev-Bedingungen möglich sind, werden nur idempotente Funktionen betrachtet.

Definition 4.14 Sei $\mathbf{B}$ eine Algebra. Dann bezeichnet man mit $IA_n(\mathbf{B})$ die Menge aller Funktionen $h : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$, die idempotent, mit allen Kongruenzrelationen von $\mathbf{B}$ verträglich und keine Projektionen sind.

Lemma 4.15 $IA_2(\mathbf{A}_6) = \emptyset$.

Beweis: Angenommen es existiert ein $m \in IA_2(\mathbf{A}_6)$. Als Abkürzung schreiben wir xy statt $m(x, y)$. Wegen der Idempotenz gilt $xx = x$ und wegen der Verträglichkeit:

$$\begin{aligned} xx &= x\Phi x(x+1) \quad x \text{ ungerade}, \\ xx &= x\Theta x(x+1) \quad x \text{ gerade}. \end{aligned}$$

Daher gilt $x(x+1) \in \{x, x+1\}$.

Angenommen für ein $x_0 \in A$ gilt $x_0(x_0+1) = x_0$. Dann gilt für x_0 ungerade:

$$x_0 = x_0(x_0+1)\Theta x_0(x_0+2)\Phi(x_0+1)(x_0+2) \in \{x_0+1, x_0+2\}$$

und für x_0 gerade:

$$x_0 = x_0(x_0+1)\Phi x_0(x_0+2)\Theta(x_0+1)(x_0+2) \in \{x_0+1, x_0+2\}.$$

Da weder $(x_0, x_0+2) \in \Theta \circ \Phi$ für ungerade x_0 noch $(x_0, x_0+2) \in \Theta \circ \Phi$ für gerade x_0 möglich ist (siehe Abb. 1), gilt $(x_0+1)(x_0+2) = x_0+1$. Da nach Voraussetzung $x_0(x_0+1) = x_0$ gilt, erhält man mit Induktion, daß

$$\forall x \in A \quad x(x+1) = x \tag{24}$$

gilt. (Gilt für ein $x_0 \in A$ $x_0(x_0+1) = x_0+1$, dann erhält man symmetrisch $(x_0-1)x_0 = x_0$ und mit Induktion, daß für alle $x \in A$ $x(x+1) = x+1$ gilt. Auch der weitere Beweis verläuft vollkommen symmetrisch). Aus (24) folgt für ungerade x:

$$x = x(x+1)\Theta x(x+2)\Phi(x+1)(x+2) = x+1$$

und für gerade x:

$$x = x(x+1)\Phi x(x+2)\Theta(x+1)(x+2) = x+1$$

also (siehe Abb. 1)

$$\forall x \in A \quad x(x+2) = x.$$

Daraus folgt weiter für ungerade x:

$$x = xx\Theta x(x-1)\Phi(x+1)(x-2)\Theta(x+1)(x-3) = (x+1)(x+3) = x+1$$

und für gerade x:

$$x = xx\Phi x(x-1)\Theta(x+1)(x-2)\Phi(x+1)(x-3) = (x+1)(x+3) = x+1.$$

Daraus folgt $x(x-1) = x(x+5) = x$ und $(y+1)(y-2) = y+1$ und daher (setzt man $y := x-1$) $x(x+3) = x$, $\forall x \in A$. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} x &= x(x+3)\Theta x(x+4)\Phi(x+1)(x+4) = x+1 \quad x \text{ ungerade, und} \\ x &= x(x+3)\Phi x(x+4)\Theta(x+1)(x+4) = x+1 \quad x \text{ gerade,} \end{aligned}$$

woraus $x(x+4) = x$ für alle $x \in A$ folgt.

Es gilt daher für alle $x, y \in A$ $xy = x$ im Widerspruch dazu, daß m keine Projektion ist. $\square$

Um $IA_n(\mathbf{A}_6)$, $n > 2$, zu untersuchen, wird folgende Aussage benötigt:

Satz 4.16 *Sei* $\mathbf{B}$ *eine Algebra mit* $IA_n(\mathbf{B}) \neq \emptyset$ *für ein* $n \geq 2$*. Dann ist entweder* $IA_2(\mathbf{B}) \neq \emptyset$ *oder* $IA_3(\mathbf{B})$ *enthält eine Mal'cev-Funktion, woraus die Kongruenzvertauschbarkeit von* $\mathbf{B}$ *folgt.*

Beweis: Angenommen $IA_3(\mathbf{B})$ enthält keine Mal'cev-Funktion. Sei k die kleinste natürliche Zahl, sodaß $IA_k(\mathbf{B}) \neq \emptyset$. Ist $k = 2$, dann ist der Satz erfüllt, und es ist nichts zu zeigen. Wir können also o.B.d.A. $k \geq 3$ voraussetzen. Man wählt ein Element $m \in IA_k(\mathbf{B})$ und definiert folgende zweistellige Operationen m_i, $1 \leq i \leq k$:

$$m_i(x, y) := m(x, \ldots, x, y, x, \ldots, x),$$

wobei y an der i-ten Stelle steht.

Behauptung: $\exists j \leq k$ mit

$$\forall s, k \geq s \neq j \quad m_s(x, y) = x. \tag{25}$$

Wegen $m \in IA_k(\mathbf{B})$ sind alle m_i verträglich und idempotent und wegen $IA_2(\mathbf{B}) = \emptyset$ Projektionen. Angenommen $m_s(x, y) = y$ und $m_t(x, y) = y$ für $s \neq t$. Dann definiert man:

$$p(x, y, z) := m(y, \ldots, y, x, y, \ldots, y, z, y, \ldots, y),$$

wobei x an der s-ten und z an der t-ten Stelle steht. Dann gilt $p(x, x, y) = m_t(x, y) = y$ und $p(x, y, y) = m_s(x, y) = y$. p ist also im Widerspruch zur Annahme eine Mal'cev-Funktion. Daher gibt es ein $j \leq k$, daß (25) erfüllt, und man kann o.B.d.A. $j = 1$ setzen. Da $m \in IA_k(\mathbf{B})$ gilt, ist m keine Projektion. Speziell gibt es also Elemente $a_1, \ldots, a_k \in B$ mit $m(a_1, \ldots, a_k) \neq a_1$. Man setzt $b := a_k$ und definiert folgende $(k-1)$-stellige Operation m_b:

$$m_b(x_1, \ldots, x_{k-1}) := m(x_1, \ldots, x_{k-1}, b).$$

Wegen (25) gilt $m_b(x, \ldots, x) = m(x, \ldots, x, b) = m_k(x, b) = x$. Mit m ist auch m_b verträglich. Weiters ist m_b keine Projektion im ersten Argument, da

$$m_b(a_1, \ldots, a_{k-1}) = m(a_1, \ldots, a_k) \neq a_1$$

gilt. m_b ist auch keine i-te Projektion, $1 < i \leq k-1$, da für $a \neq b$ (a an der i-ten Stelle)

$$m_b(b, \ldots, b, a, b, \ldots, b) = m(b, \ldots, b, a, b, \ldots, b, b) = m_i(b, a) = b \neq a$$

gilt. Daraus folgt $m_b \in IA_{k-1}(\mathbf{B})$ im Widerspruch zur Minimalität von k. □

Satz 4.17 *$IA_n(\mathbf{A}_6) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbf{N}$.*

Beweis: Folgt aus Lemma 4.15, Satz 4.16 und $\Theta \circ \Phi \neq \Phi \circ \Theta$ (siehe Abb. 1). □

Das folgende Lemma gibt eine Übersicht über alle Kongruenzengleichungen, die in $\mathbf{A}_6$ erfüllt sind.

Lemma 4.18 *$Con\mathbf{A}_6$ erfüllt jede Kongruenzengleichung, aus der nicht Kongruenzvertauschbarkeit folgt.*

Beweis: Sei $\zeta = \eta$ eine Kongruenzengleichung, die nicht in $Con\mathbf{A}_6$ gilt. Da es in $Con\mathbf{A}_6$ nur die zwei nichttrivialen Kongruenzrelationen Θ und Φ git, kann man o.B.d.A. annehmen, daß die Terme ζ und η nur aus den Variablen x, y gebildet sind. Dann sind ζ und η Elemente von $S := \{x, y, x \wedge y, x \circ y, y \circ x, (x \circ y) \wedge (y \circ x), x \circ y \circ x, \ldots\}$. Auf S ist eine natürliche Ordnung gegeben (siehe Abb. 2).

Abbildung 2: Ordnung auf S

Wegen $\Theta \circ \Phi \circ \Theta = \Phi \circ \Theta \circ \Phi = \nabla$ ergibt in Abbildung 2 jeder Term über der strichlierten Linie mit $x := \Theta$, $y := \Phi$ die Allrelation. Sind ζ und η also beide Terme$>$ $(x \circ y \circ y) \wedge (y \circ x \circ y)$, dann ist die Gleichung $\zeta = \eta$ in $Con\mathbf{A}_6$ gültig. Da $\zeta = \eta$ in $\mathbf{A}_6$ nicht gelten soll, sei $\zeta < (x \circ y \circ y) \wedge (y \circ x \circ y)$ und o.B.d.A $\zeta \leq x \circ y$. Ist $\eta \geq (x \circ y \circ y) \wedge (y \circ x \circ y)$, dann folgt $\zeta \leq x \circ y \leq (x \circ y \circ y) \wedge (y \circ x \circ y) \leq \eta$. Die Gleichung $\zeta = \eta$ impliziert daher:

$$x \circ y = (x \circ y \circ y) \wedge (y \circ x \circ y). \tag{26}$$

Ist $\eta \leq (x \circ y \circ y) \wedge (y \circ x \circ y)$ dann folgt aus $\zeta = \eta$ die Gleichung:

$$x \circ y = (x \circ y) \wedge (y \circ x). \tag{27}$$

Aus (26) bzw. (27) folgt aber $x \circ y = y \circ x$. $\square$

Aus Satz 4.17 folgt, daß die Kongruenzengleichungen, die in $Con\mathbf{A}_6$ gelten nicht lokal schwach Mal'cev charakterisierbar sein können und daher gilt:

Satz 4.19 *Sei $\zeta = \eta$ eine Kongruenzengleichung, die lokal schwach (oder stark) Mal'cev charakterisierbar ist, dann folgt aus $\zeta = \eta$ Kongruenzvertauschbarkeit.*

4.4 Der Fall der Kongruenzvertauschbarkeit

Im folgenden Abschnitt wird eine Menge S und darauf ein vertauschbarer Äquivalenzenverband $\mathbf{V}$ konstruiert, wobei es nicht möglich ist eine Mal'cev-Funktion zu finden, die mit allen Elementen von $\mathbf{V}$ verträglich ist. Abbildung 3 veranschaulicht die 25-elementige Menge S und die Äquivalenzrelation Θ_3.

Abbildung 3: S, Θ_3

Wir definieren folgende drei Äquivalenzrelationen:
$(x, y) \in \Theta_1 \Leftrightarrow$ x und y sind in der selben Spalte,
$(x, y) \in \Theta_2 \Leftrightarrow$ x und y sind in der selben Zeile,
$(x, y) \in \Theta_3 \Leftrightarrow$ x und y sind in Abb. 3 durch eine Linie verbunden.

Man prüft leicht nach, daß die so definierten Relationen miteinander bezüglich $\circ$ vertauschen, und daß $\nabla, \Delta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ den kleinsten modularen, nichtdistributiven Verband $\mathbf{M}_3$ bilden (siehe Abb. 4).

Lemma 4.20 *Es gibt keine Mal'cev-Funktion auf S, die mit Θ_1, Θ_2 und Θ_3 verträglich ist.*

Abbildung 4: $\mathbf{M}_3$

Beweis: Angenommen es gäbe eine solche Mal'cev-Funktion p. Dann müßte p die Gleichungen $p(x,x,y)=y$ und $p(x,y,y)=x$ erfüllen. Wir betrachten die Punkte a,b,c,c',c'' aus Abbildung 3. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} p(a,b,c') & \Theta_1 & p(a,b,b)=a, \\ p(a,b,c') & \Theta_2 & p(a,a,c')=c'. \end{array}$$

$p(a,b,c')$ muß also der in Abb. 3 markierte Punkt sein. Den Punkt $p(a,b,c'')$ erhält man mit:

$$\begin{array}{lll} p(a,b,c'') & \Theta_3 & p(a,b,b)=a, \\ p(a,b,c'') & \Theta_2 & p(a,a,c'')=c''. \end{array}$$

Weiters gilt:

$$\begin{array}{lll} p(a,b,c) & \Theta_2 & p(a,b,b)=a, \\ p(a,b,c) & \Theta_3 & p(a,b,c') \\ p(a,b,c) & \Theta_1 & p(a,b,c''). \end{array}$$

So ein Punkt existiert aber nicht. □

Lemma 4.21 *Sei $\zeta=\eta$ eine Kongruenzengleichung, aus der $x\circ y=y\circ x$ folgt, oder die dazu äquivalent ist. Wenn $\zeta=\eta$ für $\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3$ aus obigem Beispiel nicht gilt, dann folgt aus $\zeta=\eta$ Distributivität.*

Beweis: Sei $\zeta=\eta$ in einem Unterverband $\mathbf{V}$ von EqA einer Menge A erfüllt. Da $\mathbf{V}$ vertauschbar ist, ist $\mathbf{V}$ auch modular. Angenommen $\mathbf{V}$ wäre nicht distributiv. Dann enthält $\mathbf{V}$ einen zu $\mathbf{M}_3$ isomorphen Unterverband. Daher gilt $\zeta=\eta$ in diesem Unterverband, dann auch im obigen Beispiel. $\mathbf{V}$ muß also distributiv sein. □

Da Arithmetizität bereits alle Kongruenzengleichungen impliziert, die nicht zu $x=y$ äquivalent sind und aus Bemerkung 4.13, folgt:

Satz 4.22 *Die einzige lokal stark Mal'cev charakterisierbare Kongruenzengleichung ist Arithmetizität.*

Bemerkung 4.23 Diese Aussage bleibt auch richtig, wenn man stark durch schwach ersetzt (o. Bew.).

Literatur

[1] A. Day: *A characterization of modularity for congruence lattices of algebras*, Canad. Math. Bull. 12 (1969), 167-173.

[2] G. A. Fraser und A. Horn: *Congruence relations in direct products*, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 390-394.

[3] H. Gericke: *Theorie der Verbände*, B.I. Hochschultaschenbücher (1967).

[4] G. Grätzer: *Universal algebra*, D. Van Nostrand (1968).

[5] G. Grätzer: *Two Mal'cev-type theorems in universal algebra*, Journal of combinatorial theory 8 (1970), 334-342.

[6] H. P. Gumm: *Is there a Mal'cev-theory for single algebras?*.

[7] Th. Ihringer: *Allgemeine Algebra*, Teubner Studienbücher Mathematik (1993).

[8] B. Jónsson: *Algebras whose congruence lattices are distributive*, Math. scand. 21 (1967), 110-121.

[9] A. I. Mal'cev: *On the general theory of algebraic systems*, Mat. Sbornik 35 (77) (1954), 3-20.

[10] A. F. Pixley: *Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 105-109.

[11] A. F. Pixley: *Local Mal'cev-conditions*, Canad. Math. Bull. 15 (4) (1972), 559-568.

[12] A. F. Pixley: *Completeness in arithmetical algebras*, Algebra Universalis 2 (1972), 179-196.

[13] W. Taylor: *Fixed points of endomorphisms*, Algebra Universalis 2 (1972), 74-76.

[14] R. Wille: *Kongruenzklassengeometrien*, Springer-Verlag, Lecture notes in Mathematics Nr. 113 (1970).